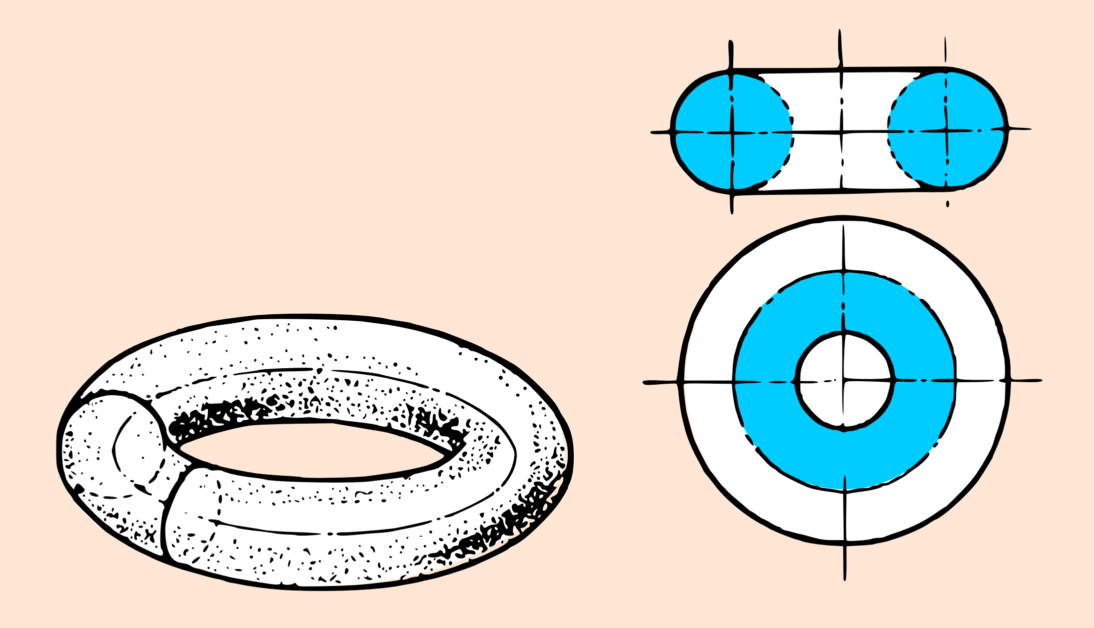
N. Krylov, P. Lobanoievski S. Maine

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE



Éditions Mir Moscou

Н. Н. КРЫЛОВ, П. И. ЛОБАНДИЕВСКИЙ,
С. А. МЭН

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА

N. KRYLOV, P. LOBANDIEVSKI,
S. MAINE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ÉDITIONS MIR • MOSCOU
1971

CDU 515 (075.8)=40

Traduit du russe par
Valentin Polonski

на французском языке

INTRODUCTION

La géométrie descriptive est la partie de la géométrie qui a pour objet l'étude des formes des corps de l'espace à travers leur représentation sur un plan.

Les tâches principales qu'elle s'assigne sont :

1) l'étude de diverses méthodes de représentation des figures de l'espace sur un plan ;

2) la recherche des propriétés géométriques des figures et des corps à partir des représentations imposées.

Depuis Gaspard Monge (1746-1818), son fondateur, la géométrie descriptive a acquis une place d'honneur dans l'ensemble des disciplines nécessaires pour former un ingénieur et un architecte.

L'importance pratique de cette discipline est due au fait qu'elle familiarise avec le langage technique expressif des dessins, apprend à construire ces derniers et à les lire sans difficulté.

L'étude de la géométrie descriptive contribue à former une imagination représentative et acquérir des habitudes de raisonnement logique. Elle perfectionne l'aptitude à recréer en pensée la forme des objets représentés sur un plan et prépare ainsi le futur ingénieur à l'étude des disciplines spéciales et à la création technique par l'établissement de projets.

Les idées techniques sont d'autant plus fructueuses que l'imagination représentative de leur auteur est plus forte et qu'il possède mieux les méthodes de représentation des corps tridimensionnels sur un plan.

L'histoire de l'architecture connaît des exemples lorsque même des architectes avertis ne sont pas arrivés d'emblée à obtenir les résultats voulus.

De nos jours, un ingénieur d'étude, fort des méthodes de la géométrie descriptive et de la connaissance des lois de la mécanique de construction peut tant qu'il veut « édifier » et « détruire » ses créations sur le papier pour s'approcher de la solution optimale.

Ainsi lorsqu'on cherche des éléments nouveaux, prend des décisions techniques audacieuses, établit des projets ou construit des édifices, la connaissance du dessin géométral et de sa base théorique, la géométrie descriptive, est de rigueur.

§ 1. Méthode des projections

Toute représentation d'une figure s'obtient en effectuant une *projection.* A cet effet on choisit dans l'espace un point quelconque S comme *centre de projection* (fig. 1) et un plan K, ne passant pas par ce point, comme *plan de projection* (tableau). Pour obtenir la projection du point A de l'espace sur le plan K, on mène par le centre de projection S la droite SA jusqu'à son intersection avec le plan

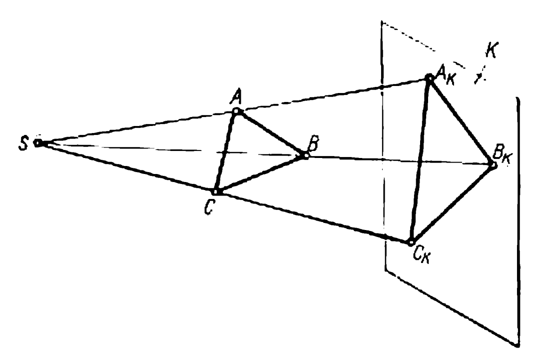


Fig. 1

K en A_k. Il est d'usage d'appeler A_k *projection centrale ou conique du point* A, et la droite SA, *projetante.* La projection d'une figure est l'ensemble des projections de tous ses points.

Les projetantes menées par tous les points d'une figure courbe forment une surface projetante conique.

La projection d'une figure courbe constitue ainsi une ligne d'intersection de la surface projetante et du tableau.

Notons que lorsqu'on cherche la projection d'une droite AB, la surface projetante est un plan. Ce dernier coupe le plan K suivant une droite A_kB_k qui est précisément la projection de la droite AB.

Ainsi la projection d'une droite qui ne passe pas par le point S est une droite.

Pour construire les projections des figures il n'est pas toujours nécessaire de chercher les projections de tous leurs points. Ainsi, la projection du triangle ABC est déterminée déjà par la construction des projections A_k, B_k, C_k de ses trois sommets. La projection d'un polygone ou d'un polyèdre quelconque s'obtient en déterminant les projections de leurs sommets.

En pratique, on recourt largement au cas lorsque le centre de projection est rejeté à l'infini. Dans ces conditions, les projetantes sont *parallèles* entre elles (fig. 2) et les projections des points, des

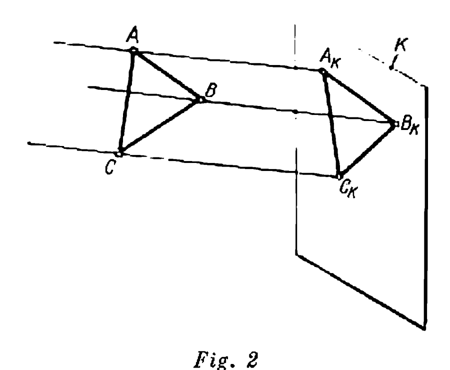


Fig. 2

figures et des corps s'appellent alors *projections parallèles* ou *cylindriques*. Les projections parallèles peuvent être soit obliques, lorsque la direction de la projection forme avec le plan projetant un angle différent de 90°, soit orthogonales, lorsque cet angle est droit.

§ 2. Prescriptions auxquelles doit satisfaire un dessin géométral

La représentation d'un objet obtenue par projection centrale ou parallèle s'appelle *dessin géométral*. Voici les prescriptions principales auxquelles un tel dessin doit satisfaire.

1. L'intelligence d'un dessin géométral doit être immédiate, c'est-à-dire qu'il doit suggérer l'idée de la forme du corps de l'espace représenté.

2. Chaque dessin doit définir d'une manière univoque la forme et la position de l'objet représenté. Cette propriété du dessin porte le nom de « *réversibilité* ».

3. La représentation de l'objet doit être commode pour la lecture des dimensions.

4. Le mode d'exécution du dessin doit être simple.

L'étude des projections centrale et parallèle schématisées par les figures 1 et 2 permet de déduire que les dessins géométraux ainsi

obtenus ne sont pas « réversibles ». Une projection centrale ou parallèle d'un point ne détermine pas sa position dans l'espace. En effet, la position du point A ne peut pas être définie par la projection donnée A_h sur le plan K, car cette projection peut correspondre à n'importe quel point de la projetante SA.

Dans l'étude qui suit des modes de représentation employés en technique nous allons indiquer comment cette indétermination est levée pour assurer une correspondance univoque entre les points de l'espace et les points du plan K.

§ 3. Certaines propriétés de la projection parallèle

Etablissons les propriétés de la position relative des points, des lignes et des figures planes qui sont conservées parleurs projections

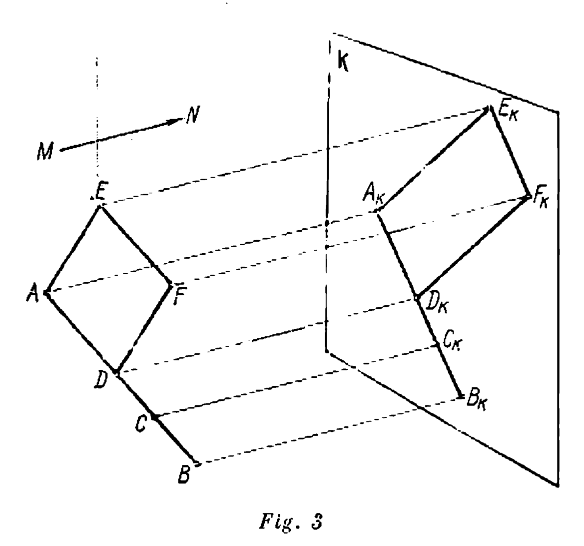


Fig. 3

parallèles. Soit la direction de projection indiquée par la flèche MN (fig. 3).

1. La projection d'une droite non parallèle à MN est une droite, car toutes les projetantes des points A, B, C reposant sur la même droite se situent dans le même plan.

2. Le rapport des segments de la droite AB est égal au rapport de leurs projections, c'est-à-dire $\frac{AC}{CB}=\frac{A_kC_k}{C_kB_k}$ car $AA_k \parallel BB_k$ et $BB_k \parallel CC_k$.

3. Les projections de deux droites parallèles sont parallèles. Soit $AB \parallel EF$. Si l'on suppose que leurs projections A_kB_k et E_kF_k

ne sont pas parallèles, le point de leur intersection dans le plan K correspond au point d'intersection des droites AB et EF, ce qui est impossible, car AB et EF sont parallèles. Donc

$$A_kB_k \parallel E_kF_k.$$

4. Le rapport de deux segments de droites parallèles est égal au rapport de leurs projections.

Soit, par exemple, $AB \parallel EF$. En joignant A à E et en traçant $FD \parallel AE$, on obtient le parallélogramme $AEFD$. D'après n° 3, le quadrilatère $A_kE_kF_kD_k$ est également un parallélogramme, et donc $E_kF_k = A_kD_k$.

Mais $\frac{AB}{AD} = \frac{A_kB_k}{A_kD_k}$, et puisque $AD = EF$ et $A_kD_k = E_kF_k$, il vient $\frac{AB}{EF} = \frac{A_kB_k}{E_kF_k}$.

PREMIÈRE PARTIE

PROJECTIONS ORTHOGONALES

La méthode des projections orthogonales, dite de Monge, consiste à repérer l'objet par rapport à deux plans perpendiculaires à l'aide des projetantes perpendiculaires à ces plans.

Tous les énoncés démontrés au § 3 se vérifient pour les projections orthogonales qui sont un cas particulier des projections parallèles.

CHAPITRE PREMIER

PROJECTIONS D'UN POINT

§ 4. Système orthogonal de deux plans de projection. Epure d'un point

Dans un système orthogonal l'un des plans de projection se situe horizontalement ; il est dit *plan horizontal de projection H*. Le second plan est vertical (fig. 4); il se trouve en face de l'observateur et s'appelle *plan vertical de projection V* ou *plan frontal*. Les plans *H* et *V* sont illimités et opaques. Leur ligne d'intersection s'appelle *ligne de terre* ou l'*axe de projection*; nous la désignons par *Ox*. Les plans de projection divisent l'espace en quatre angles dièdres, dits quadrants, numérotés comme l'indique la figure 4.

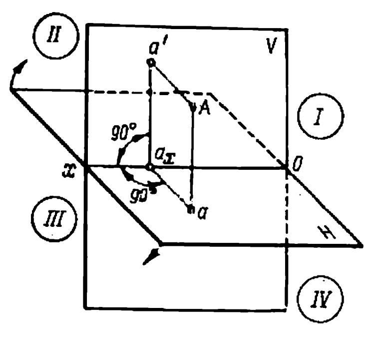


Fig. 4

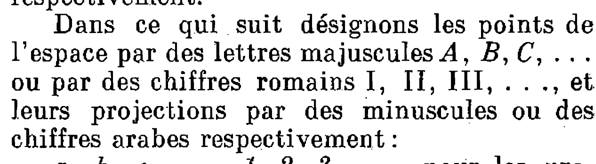
Les projections orthogonales sont considérées en supposant que l'observateur se trouve dans le premier quadrant à une distance illimitée des plans de projection. Ces plans étant opaques,

l'observateur ne voit que les points, lignes et figures situés dans les limites de ce même quadrant.

Pour construire les projections, il faut retenir que *la projection orthogonale d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.*

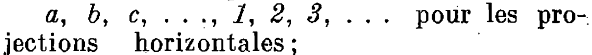
La figure 4 représente le point A de l'espace et ses projections orthogonales a et a'.

Le point a est la projection *horizontale* et le point a' (a prime) la projection *frontale*. Chacune d'elles est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur les plans H et V respectivement.



Dans ce qui suit désignons les points de l'espace par des lettres majuscules A, B, C, . . . ou par des chiffres romains I, II, III, . . ., et leurs projections par des minuscules ou des chiffres arabes respectivement :

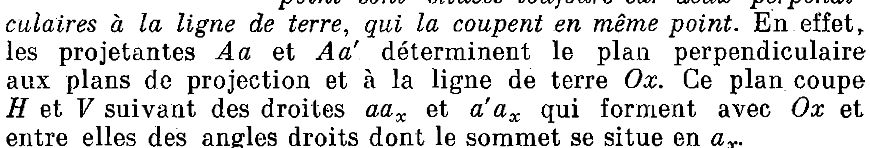
a, *b*, *c*, . . ., *1*, *2*, *3*, . . . pour les projections horizontales ;



a', *b'*, *c'*, . . ., *1'*, *2'*, *3'*, . . . pour les projections verticales.

Fig. 5

On peut démontrer que *les projections d'un point sont situées toujours sur deux perpendiculaires à la ligne de terre, qui la coupent en même point.* En effet, les projetantes Aa et Aa' déterminent le plan perpendiculaire aux plans de projection et à la ligne de terre Ox. Ce plan coupe H et V suivant des droites aa_x et $a'a_x$ qui forment avec Ox et entre elles des angles droits dont le sommet se situe en a_x.



La réciproque est également vraie, c'est-à-dire *si dans les plans de projection les points a et a' se situent sur des droites qui coupent la ligne de terre Ox au même point sous un angle droit, ils sont les projections d'un point A.* Ce point est déterminé par l'intersection des perpendiculaires élevées des points a et a' aux plans H et V.

Notons que les plans de projection peuvent être disposés dans l'espace d'une autre manière. Ainsi, tout en étant perpendiculaires entre eux, les deux plans peuvent être verticaux. Dans ce cas, la proposition démontrée sur l'orientation des projections opposées des points par rapport à un axe se vérifie également.

Pour obtenir un dessin plan des projections considérées, on rabat le plan H sur le plan V en le faisant tourner autour de la ligne de terre Ox, comme le montrent les flèches de la figure 4. Il en résulte que le demi-plan avant H se confond avec le demi-plan inférieur V, et le demi-plan arrière H, avec le demi-plan supérieur V.

Le dessin géométral sur lequel les plans de projection avec toutes les images qu'ils portent sont rabattus d'une façon définie s'appelle *épure.* La figure 5 représente l'épure du point A.

Un tel rabattement des plans H et V place les projections a et a' sur la même perpendiculaire à la ligne de terre Ox, la distance a_xa de la projection horizontale du point A à la ligne de terre étant égale à celle du point A au plan V, et la distance a_xa' de la projection frontale du point A à la ligne de terre Ox étant égale à celle du point A au plan H.

Donnons aux droites qui unissent les projections opposées d'un point le nom de *lignes de rappel.*

La position des projections d'un point sur une épure est définie par le quadrant dans lequel se trouve le point donné.

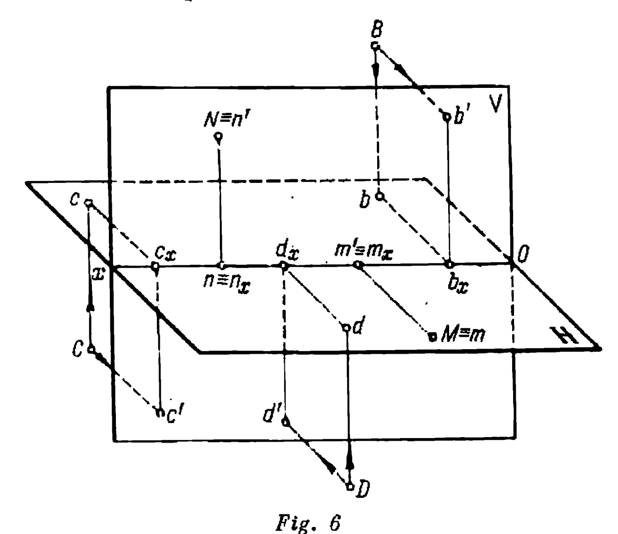


Fig. 6

Ainsi, si le point B est situé dans le deuxième quadrant (fig. 6), les plans de projection une fois confondus, les deux projections de ce point reposent au-dessus de la ligne de terre Ox (fig. 7). Si le point C est situé dans le troisième quadrant, les plans une fois confondus, sa projection horizontale se trouve au-dessus de la ligne de terre et sa projection frontale au-dessous de cette ligne. Enfin, si le point D se trouve dans le quatrième quadrant, ses deux projections sont situées au-dessous de la ligne de terre Ox. Les figures 6 et 7 montrent encore les points M et N qui reposent dans les plans de projection [1]. En cette position les points se confondent avec l'une de leurs projections, alors leur autre projection se situe sur la ligne de terre Ox. Cette particularité est traduite également par

[1] Sur les figures 6, 7 et celles qui suivent les points confondus sont liés par le signe d'identité.

la notation: la projection qui coïncide avec le point lui-même est désignée par une lettre majuscule. Les deux projections du point

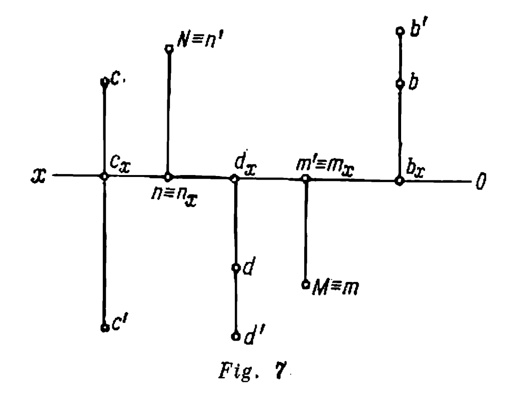


Fig. 7

se confondent lorsque le point se trouve dans le deuxième ou le quatrième quadrant à la même distance des plans de projection. Si le point repose sur la ligne de terre *Ox*, ses deux projections coïncident sur l'épure avec le point lui-même.

§ 5. Système orthogonal de trois plans de projection

Nous avons démontré dans ce qui précède que deux projections d'un point déterminent sa position dans l'espace. Puisque chaque figure ou corps est un ensemble des points, on peut dire également que *deux projections orthogonales d'un objet* (dont la notation est donnée par des lettres) *suffisent à déterminer sa forme.*

Pourtant la nécessité de représenter des édifices, machines et ouvrages d'art variés impose, en plus des deux projections principales, l'exécution des projections supplémentaires dont le but est de rendre le dessin géométral plus clair et sa lecture plus commode.

La figure 8 donne un exemple de trois plans de projection. Le troisième plan perpendiculaire à *H* et *V* est désigné par la lettre *P* et porte le nom de *plan de profil.*

Les projections des points sur ce plan sont dites également *de profil*; elles sont désignées par des lettres minuscules ou des chiffres arabes affectés du signe seconde (a'', b'', c'', . . ., $1''$, $2''$, $3''$, . . .).

En se coupant les plans de projection déterminent trois axes: *Ox* (ligne de terre), *Oy* et *Oz* qu'on peut considérer comme un système de coordonnées cartésiennes de l'espace dont l'origine est le point *O*. Ce point divise chaque axe de coordonnées en deux demi-droites. La notation employée pour la figure 8 correspond au « système dextre » de coordonnées.

Les trois plans de projection divisent l'espace en huit trièdres dits *octants.* La numération des octants est donnée sur la figure 8.

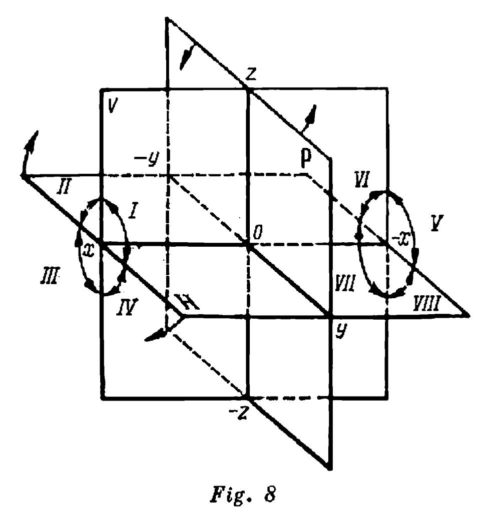
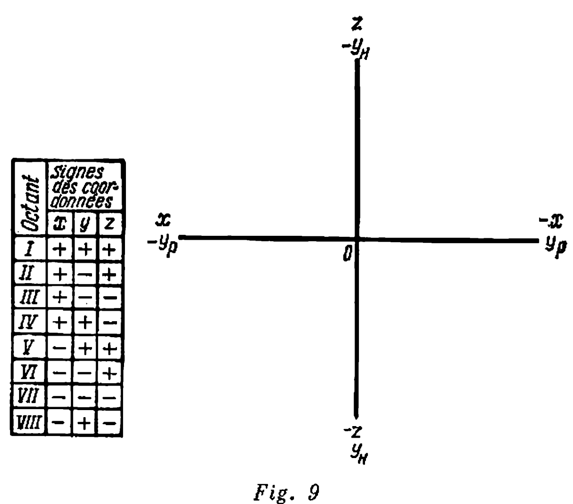


Fig. 8

Considérons comme auparavant que l'observateur se trouve dans le premier octant.

Pour obtenir l'épure, les plans *H* et *P* sont rabattus dans le sens des flèches (fig. 8) jusqu'à ce qu'ils coïncident avec le plan *V*.



Octant	Signes des coordonnées		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	−	+
III	+	−	−
IV	+	+	−
V	−	+	+
VI	−	−	+
VII	−	−	−
VIII	−	+	−

Fig. 9

Il en résulte que le demi-plan avant *H* se confond avec le demi-plan inférieur *V*, et le demi-plan arrière *H*, avec le demi-plan supérieur *V*.

Après la rotation de 90° autour de l'axe Oz, le demi-plan avant P se confond avec le demi-plan droit V et le demi-plan arrière P, avec le demi-plan gauche V.

En définitive on obtient les plans de projection confondus représentés sur la figure 9. Sur ce dessin, les axes Ox et Oz qui se situent dans le plan fixe V ne sont figurés qu'une seule fois, alors que l'axe Oy est représenté deux fois. Il en est ainsi parce qu'en tournant avec le plan H, l'axe Oy se confond sur l'épure avec Oz, et en tournant avec le plan P, Oy se confond avec Ox.

Les lettres H et P affectées à l'axe Oy rappellent cette particularité.

Dans ce qui suit nous ne désignerons pas spécialement les demi-axes négatifs ($-Ox$, $-Oy$, $-Oz$).

§ 6. Trois coordonnées et trois projections d'un point

Les coordonnées sont des nombres associés à un point pour déterminer sa position dans l'espace ou sur une surface et qui traduisent la distance de ce point aux plans de projection.

Dans un espace tridimensionnel, un point est repéré par trois coordonnées cartésiennes x, y et z.

La coordonnée x s'appelle *abscisse*, la coordonnée y *éloignement* et la coordonnée z *cote*. L'abscisse x définit la distance du point considéré au plan P, l'éloignement y sa distance au plan V et la cote z sa distance au plan H. En adoptant le système représenté sur la figure 8 pour la lecture des coordonnées du point, composons le tableau (voir fig. 9) des signes de coordonnées pour les huit octants. Un point quelconque de l'espace A déterminé par ses coordonnées x, y, z est désigné par A (x, y, z).

Si $x = 5$, $y = 4$ et $z = 6$, on écrit A (5, 4, 6). Le point A dont toutes les coordonnées sont positives se trouve dans le premier octant.

Pour construire l'image du point et de ses projections sur un modèle de l'espace (fig. 10), il est recommandé de faire appel à un parallélépipède de coordonnées qui dans le cas de projections orthogonales est toujours rectangle. D'abord on porte sur les axes de coordonnées à partir du point O des segments respectifs égaux à 5, 4 et 6 unités de longueur. Ces segments (Oa_x, Oa_y et Oa_z) servent d'arêtes pour construire le parallélépipède rectangle. Son sommet opposé à l'origine des coordonnées détermine précisément le point A considéré. On s'aperçoit aisément que pour définir ce point il suffit de construire seulement trois arêtes de parallélépipède, par exemple Oa_x, a_xa et aA, ou Oa_y, a_ya et aA, etc. Ces arêtes forment la ligne brisée de coordonnées; la longueur de chacun de ses éléments correspond à la coordonnée respective du point.

La construction du parallélépipède permet de déterminer non seulement la position du point A dans l'espace, mais encore ses trois projections orthogonales.

Les trois arêtes du parallélépipède qui se coupent en A constituent les projetantes du point A sur les plans H, V et P.

Chaque projection orthogonale du point A étant située dans un plan, il suffit de deux coordonnées pour la définir.

Ainsi, la projection horizontale a est déterminée par les coordonnées x et y, la projection frontale a' par les coordonnées x et z, la

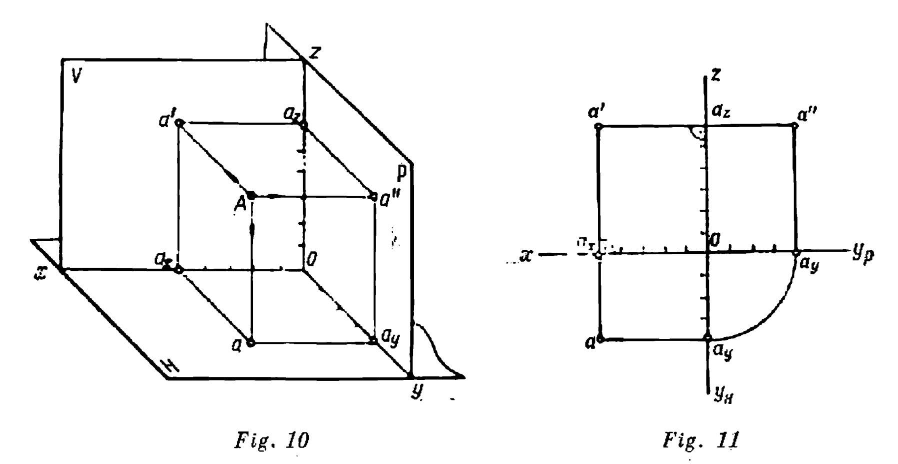


Fig. 10 *Fig. 11*

projection de profil a'' par les coordonnées y et z. Mais deux projections quelconques sont déterminées par trois coordonnées. C'est pourquoi repérer un point par deux projections revient à le repérer par trois coordonnées.

Lorsque *sur une épure* (fig. 11) tous les plans de projection sont confondus, *les projections* a et a' *se situent sur la même perpendiculaire à l'axe* Ox, *et les projections* a' *et* a'' *sur la même perpendiculaire à l'axe* Oz.

Pour ce qui est des projections a et a'', elles aussi sont liées par les droites aa_y et $a''a_y$ perpendiculaires à l'axe Oy (voir fig. 10). Mais comme cet axe occupe sur l'épure deux positions, le segment aa_y ne peut pas être le prolongement du segment $a''a_y$.

La construction des projections du point A (5, 4, 6) sur l'épure d'après les coordonnées données s'effectue dans l'ordre suivant: portons sur la ligne de terre Ox à partir de l'origine le segment $Oa_x = x$ (dans notre cas, $x = 5$), puis menons par le point a_x la perpendiculaire à Ox et portons sur cette dernière (compte tenu des signes plus ou moins) les segments $a_xa = y$ (pour obtenir a) et $a_xa' = z$ (pour obtenir a'). Il reste à construire la projection de profil

du point a''. Puisque la projection de profil et la projection frontale doivent se trouver sur la même perpendiculaire à l'axe Oz, traçons par a' la droite $a'a'' \perp Oz$.

Reste enfin à trouver la distance du point a'' à l'axe Oz.

Considérant le parallélépipède de coordonnées (voir fig. 10) dont les arêtes sont $a_z a'' = Oa_y = a_x a = y$, déduisons que la distan-

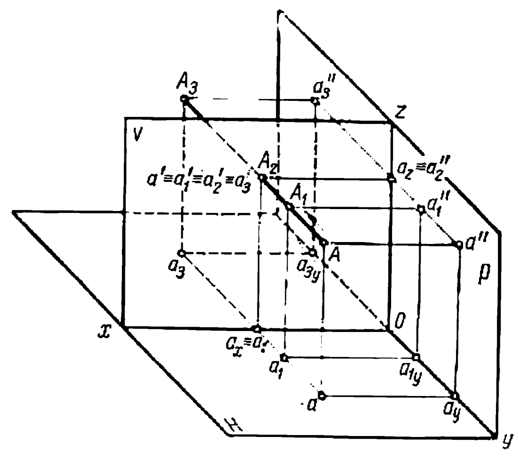


Fig. 12

ce cherchée $a_z a''$ est égale à y. Le segment $a_z a''$ est porté à droite de l'axe Oz lorsque $y > 0$ et à gauche lorsque $y < 0$.

Considérons les modifications qu'entraîne sur une épure le changement de la position d'un point dans l'espace.

Soit toujours le même point A (5, 4, 6) se déplaçant, par exemple, suivant une droite perpendiculaire au plan V. Dans ces conditions la seule coordonnée qui change est l'éloignement y, la distance du point au plan V; les coordonnées x et z restent constantes, et la projection du point déterminée par ces coordonnées, c'est-à-dire a', ne change pas de position.

Quant aux projections a et a'', la première se rapproche de l'axe Ox, et la deuxième de l'axe Oz. Sur les figures 12 et 13, la nouvelle position du point est donnée par les notations A_1, a_1, a_1' et a_1''. Lorsque le point atteint le plan V ($y = 0$), les deux des trois projections (a_2 et a_2'') reposent sur les axes.

En se déplaçant du premier octant au deuxième, le point s'éloigne du plan V. L'éloignement y devient négatif, sa valeur absolue croît. La projection horizontale d'un point du deuxième octant reposant sur le demi-plan arrière H vient se placer sur l'épure au-dessus de l'axe Ox, alors que sa projection de profil située sur le demi-plan

arrière P vient se placer sur l'épure à gauche de l'axe Oz. On a toujours le segment $a_z a_3'' = y$.

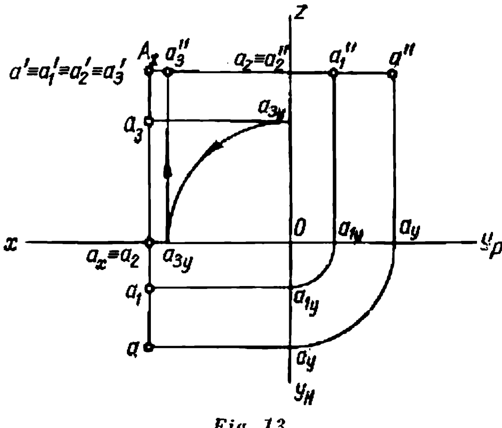


Fig. 13

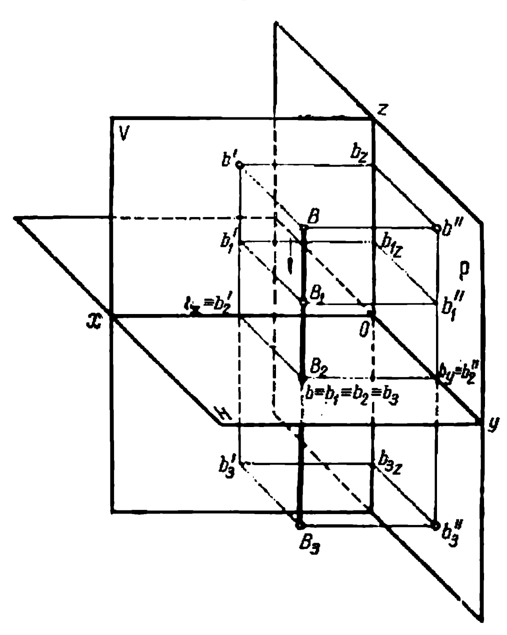


Fig. 14

Examinons encore un exemple de déplacement d'un point dans l'espace. Soit le point B (fig. 14 et 15) qui se déplace en bas suivant la verticale.

Dans ce cas, c'est la cote z qui varie. Les coordonnées x et y, ainsi que la projection horizontale qu'elles déterminent, ne changent pas. Tant que dans les limites du premier octant le point s'approche du plan H, sa projection frontale tend vers l'axe Ox, et sa projection de profil, vers l'axe Oy (voir le point B_1).

Le point B_2 et ses projections b_2, b_2' et b_2'' correspondent au cas où $z = 0$ et le point est situé dans le plan H. Passant ensuite au quatrième octant, le point s'éloigne de H. La cote z est alors négative, et sa valeur absolue augmente. Les projections frontale et de

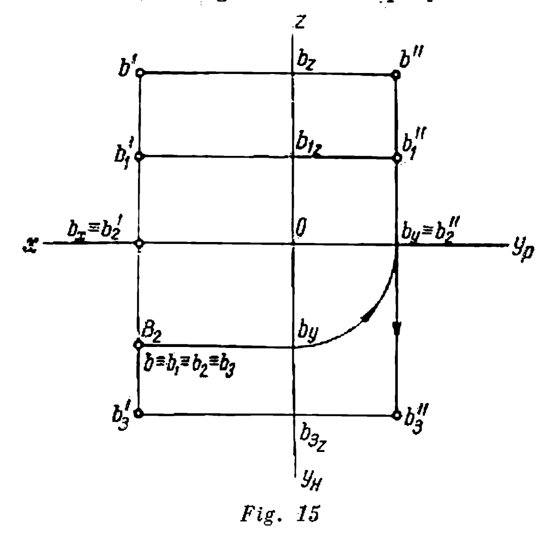


Fig. 15

profil du point se trouvent toujours sur la même perpendiculaire à l'axe Oz, dans les demi-plans inférieurs V et P.

Les images et épures des points dans d'autres octants sont données sur la figure 16; l'indice du point considéré correspond à l'octant auquel il appartient. Sur la figure 16 et les épures qui la suivent nous ne désignons pas par des lettres les points d'intersection des axes de coordonnées avec les lignes de rappel. Nous simplifions ainsi quelque peu les dessins. Pour une figure de l'espace représentée par deux projections et dont la distance au plan P n'a pas d'importance nous n'indiquerons pas l'origine.

Dans ce qui suit nous donnerons également des épures sans axes de coordonnées. On utilise ces épures dans la pratique pour représenter les figures de l'espace qui importent surtout par elles-mêmes et non pas par leur position par rapport aux plans de projection. Les plans de projection sont définis alors à une translation près (fig. 17). La translation se fait généralement de façon que tous les points de la figure se trouvent au-dessus du plan H et devant le

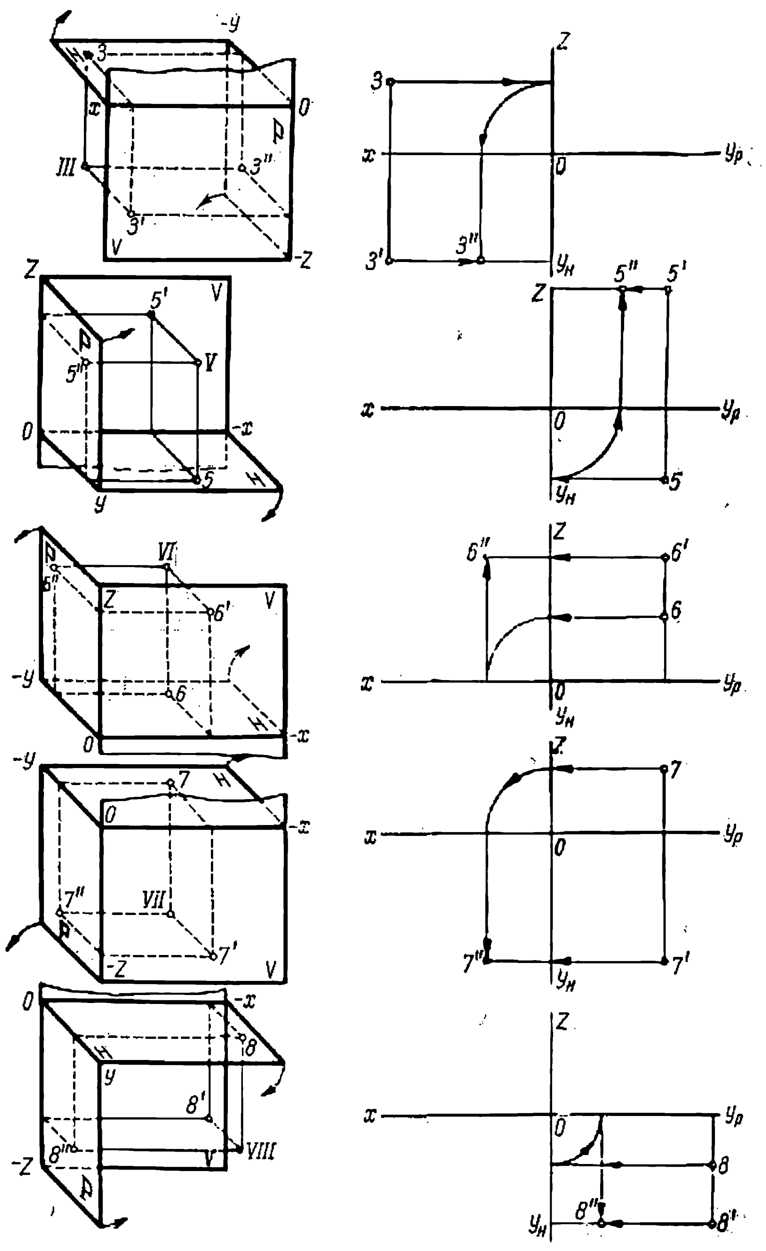

-y
H
3
x
0
P
III
3''
3'
V
-Z
Z
x
yp
0
yH
Z
5'
V
P
5''
V
0
-x
5
H
y
5''
5'
Z
x
yp
0
yH
5
P
VI
6''
Z
6'
V
-y
6
H
0
-x
Z
6''
6'
6
x
yp
0
yH
-y
7
H
0
-x
7''
VII
P
7'
-Z
V
Z
7
x
yp
0
7''
yH
7'
0
-x
H
8
y
8'
8''
VIII
V
-Z
P
Z
x
yp
0
8
8''
yH
8'

Fig. 16

plan V. Dans ces conditions la position de l'axe Ox étant indéfinie, l'épure ne doit pas être établie par rotation autour de l'axe de coordonnées. Sur l'épure, les plans H et V sont confondus de sorte que les projections d'indices différents des points se reposent sur des droites verticales.

L'épure sans axes des points A et B (fig. 18) *ne détermine pas leur position dans l'espace mais permet de juger de leur orientation relative.* Ainsi, le segment Δx caractérise le déplacement du point A par

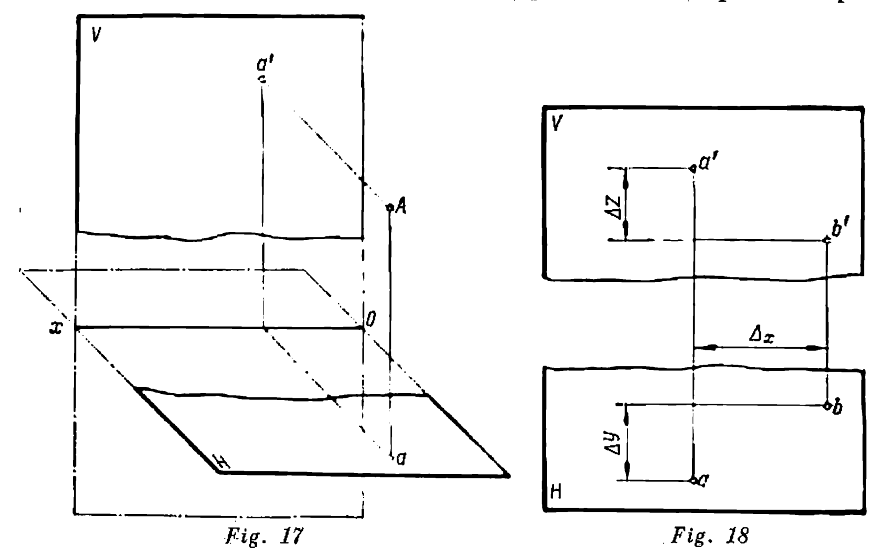


Fig. 17 *Fig. 18*

rapport au point B dans le sens parallèle aux plans H et V. En d'autres termes, Δx indique combien le point A se trouve plus à gauche que le point B. Le déplacement relatif du point dans le sens perpendiculaire au plan V est déterminé par le segment Δy. Dans notre exemple, le point A est plus proche de l'observateur que le point B de la distance Δy. Enfin, le segment Δz indique combien le point A est plus haut que le point B.

Bien que pour la solution de nombreux problèmes les axes soient inutiles, il ne serait pourtant pas raisonnable de les rejeter définitivement. La solution des problèmes techniques variés impose la connaissance de la position de tel ou tel objet par rapport aux axes des coordonnées cartésiennes. Cette connaissance est nécessaire également pour l'étude de la perspective linéaire et de la perspective axonométrique qui font partie de la géométrie descriptive.

Sur la majorité des épures nous gardons donc les axes de coordonnées. Les dessins déterminent alors non seulement la forme de l'objet, mais encore sa position par rapport aux plans de projection.

LIGNE DROITE

§ 7. Définition d'une droite

Une droite, de même qu'un point, est le plus simple élément de toute figure géométrique, c'est pourquoi il faut l'étudier en détail.

Répondons avant tout à la question : comment définir la position d'une droite dans l'espace?

On dit généralement : par deux points. La réponse est juste, mais non exhaustive. La position d'une droite peut être aussi déterminée

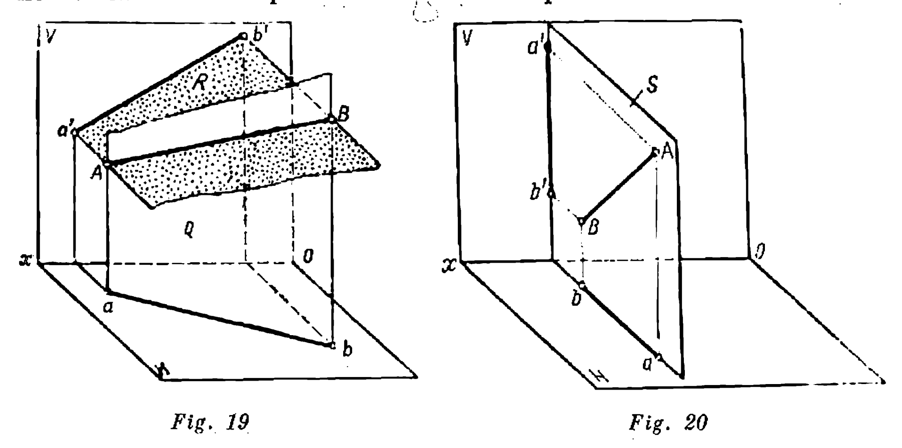


Fig. 19 *Fig. 20*

par deux plans qui se coupent, par deux projections, par un point et des angles d'inclinaison par rapport aux plans de projection, par un point et les cosinus directeurs qui sont les cosinus des angles formés par la droite considérée et les axes de coordonnées.

Nous ne nous attarderons pas à examiner les deux premiers modes de détermination d'une droite dans l'espace que le lecteur connaît déjà du cours de géométrie élémentaire, et montrerons que *la position d'une droite est complètement définie par deux de ses projections.*

Soient deux droites [1] ab et $a'b'$ (fig. 19) des plans H et V. Menons par ces deux droites des plans Q et R perpendiculaires aux plans de projection. Si ces plans se coupent n'étant pas parallèles, leur intersection forme précisément la droite AB (unique dans l'espace), dont les projections sont ab et $a'b'$ (la première étant la projection horizontale, et la deuxième verticale).

[1] Dans l'exemple considéré et ceux qui le suivent chaque droite est figurée sur l'épure sous la forme d'un segment de droite.

Les plans Q et R peuvent se confondre en un plan S ; il en est ainsi lorsque ab et $a'b'$ sont perpendiculaires à la ligne de terre (fig. 20).

Dans ce cas, la droite est déterminée d'une manière univoque par ses deux projections si l'on prend sur chacune d'elles deux points quelconques désignés par des lettres ou des chiffres. Si on ne le fait pas, on peut prendre pour la droite cherchée une droite quelconque située dans ce plan, à condition que $AB \nparallel H$ et $AB \nparallel V$.

§ 8. Positions relatives d'une droite par rapport aux plans de projection

1. Droite quelconque (voir fig. 19). *C'est une droite qui n'est parallèle à aucun des plans de projection.* Sur l'épure de la figure 21 cette droite est déterminée par les projections de deux points, A

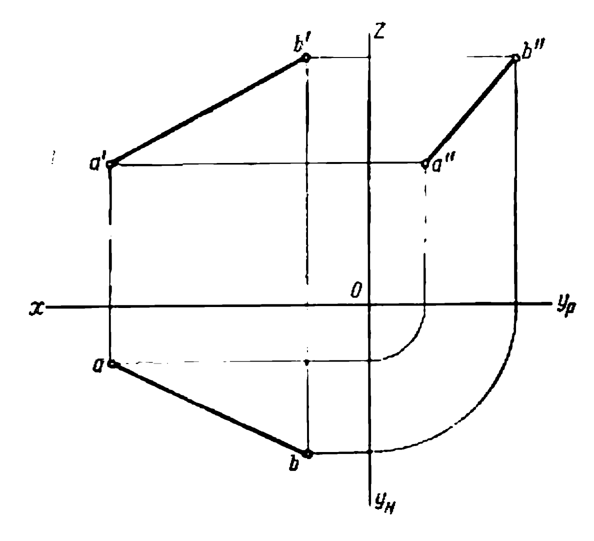


Fig. 21

et B. En joignant les projections de même indice des points, on obtient les projections d'un segment de droite.

2. Droite parallèle au plan horizontal de projection (fig. 22 et 23). Cette droite est dite *horizontale.*

Tous les points d'une horizontale se trouvant à la même distance du plan H, tout couple de points pris sur cette droite vérifie l'égalité $z_A = z_B$. Cela signifie que sur une épure sa projection frontale $a'b'$ est parallèle à la ligne de terre, alors que sa projection hori-

zontale peut occuper une position quelconque par rapport à cette dernière. La projection de profil $a''b''$ est parallèle à l'axe Oy.

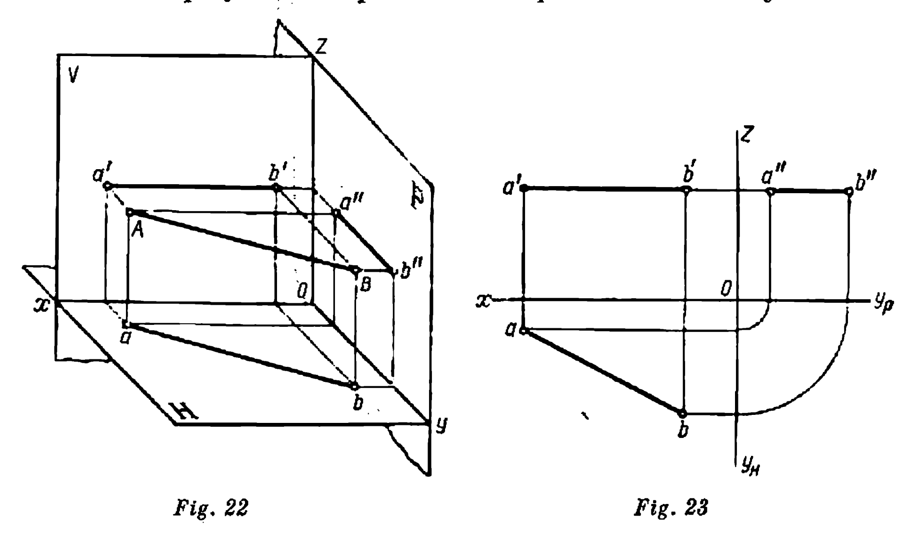


Fig. 22 *Fig. 23*

3. **Droite parallèle au plan frontal de projection** (fig. 24 et 25). Cette droite s'appelle *frontale.*

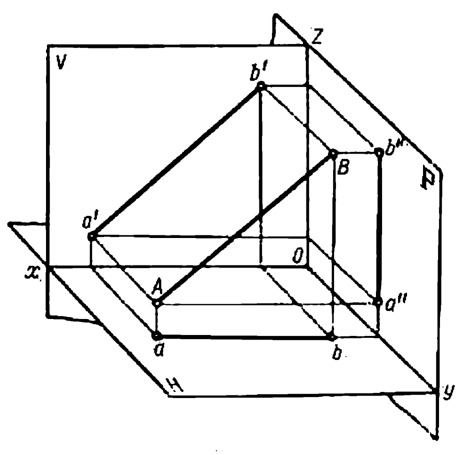


Fig. 24

Un raisonnement analogue à celui de n° 2 nous amène à conclure que la projection horizontale d'une frontale est parallèle à la ligne de terre, sa projection frontale dans le cas général occupe une posi-

tion quelconque, alors que sa projection de profil est parallèle à l'axe *Oz*.

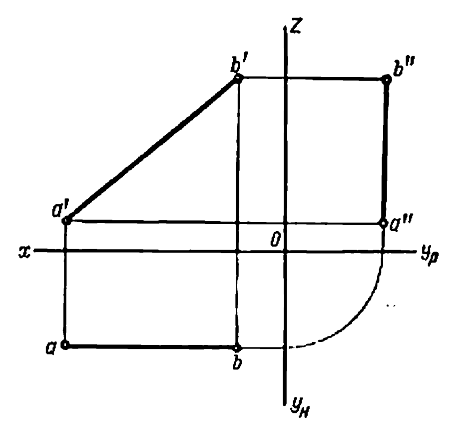


Fig. 25

4. **Droite parallèle au plan de profil** (3[e] plan de projection) (fig. 26 et 27). Cette droite s'appelle *droite de profil*. Deux points

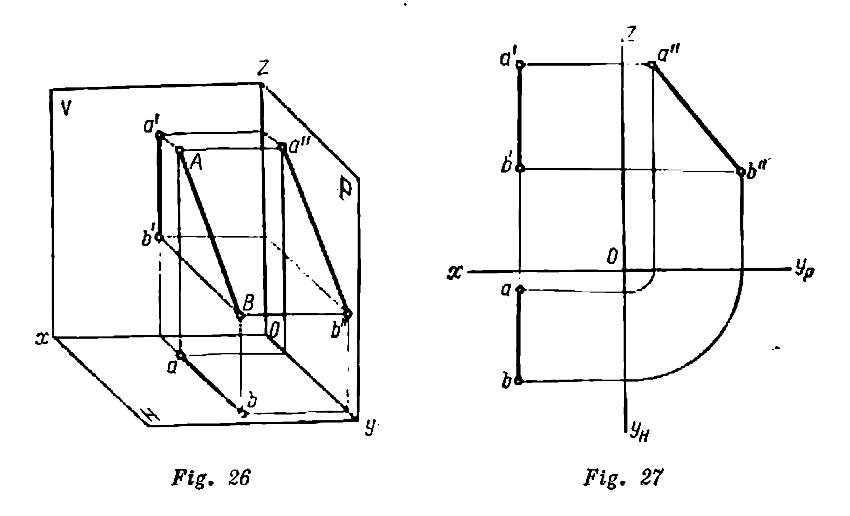


Fig. 26 *Fig. 27*

quelconques d'une droite de profil vérifient l'égalité $x_A = x_B$, donc les projections horizontale et frontale de cette droite sont perpendiculaires à la ligne de terre.

On distingue les droites de profil *montantes* et *descendantes.* Les premières montent en s'éloignant de l'observateur et les secondes

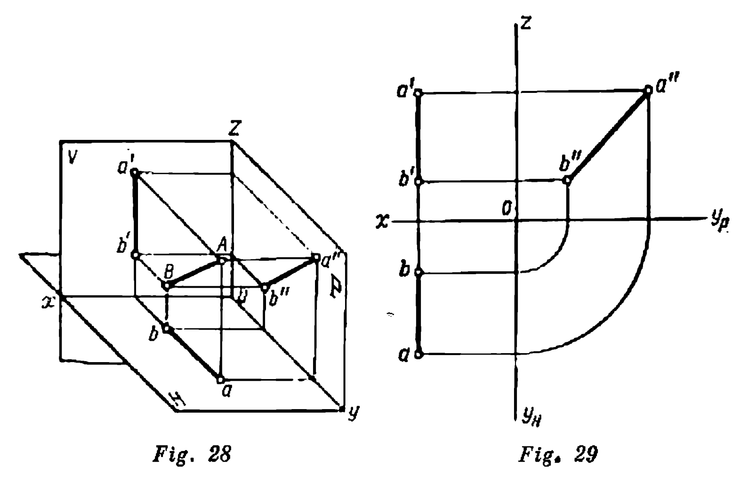


Fig. 28 *Fig. 29*

descendent. Les figures 26 et 27 représentent un segment d'une droite de profil montante, et les figures 28 et 29, un segment d'une droite descendante.

5. **Droites perpendiculaires à un plan de projection.** La figure 30 représente les projections de trois segments de droite *AB*, *CD* et *EF*

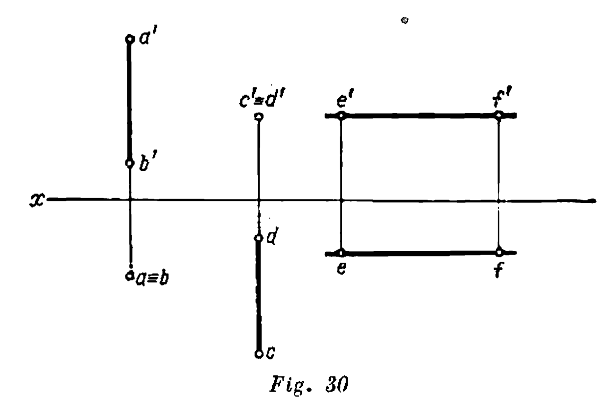


Fig. 30

perpendiculaires respectivement à *H*, *V* et *P*. La projection d'une droite sur le plan auquel cette droite est perpendiculaire est un point. La perpendiculaire au plan horizontal de projection se nomme *verticale* et la perpendiculaire au plan frontal de projection est dite *droite de bout.*

6. Droites contenues dans les plans de projection. Les droites de ce type sont caractérisées par le fait que deux de leurs trois projections reposent toujours sur les axes de coordonnées. La figure 31 représente deux projections des segments : AB situé dans le plan H, CD situé dans le plan V et EF qui se confond avec la ligne de terre.

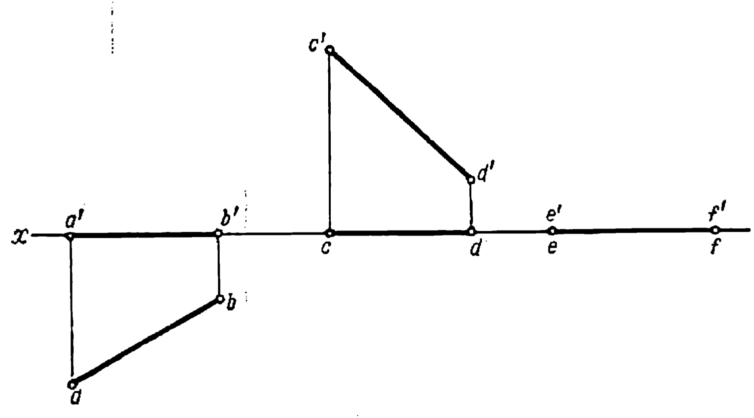


Fig. 31

En conclusion notons que lorsqu'une droite est parallèle à un plan de projection, elle se projette sur ce plan en vraie grandeur.

§ 9. Longueur d'un segment de droite et angles d'inclinaison d'une droite sur les plans de projection

La longueur du segment de droite AB peut être déterminée (fig. 32) à partir d'un triangle rectangle ABb_1, dont le côté $Ab_1 = ab$ (projection du segment AB sur le plan H), et le côté $Bb_1 = \Delta z$ (différence des distances des points A et B au plan H). L'angle α de ce même triangle détermine l'angle entre le segment de droite AB et le plan H.

Si au lieu du plan H on prend le plan V, la longueur du segment AB peut être définie d'une manière analogue à partir du triangle rectangle ABa'_1 (fig. 33) où le côté Ba'_1 est égal à la projection $a'b'$, et le côté Aa'_1 est égal à Δy (différence des distances des points A et B au plan V). Dans le même triangle ABa'_1 l'angle β mesure l'inclinaison du segment AB sur le plan V.

Les épures des figures 34 et 35 montrent comment il faut rechercher la vraie grandeur (aB_0 et $a'B_0$) d'un segment et les angles qui mesurent son inclinaison sur les plans H (angle α) et V (angle β).

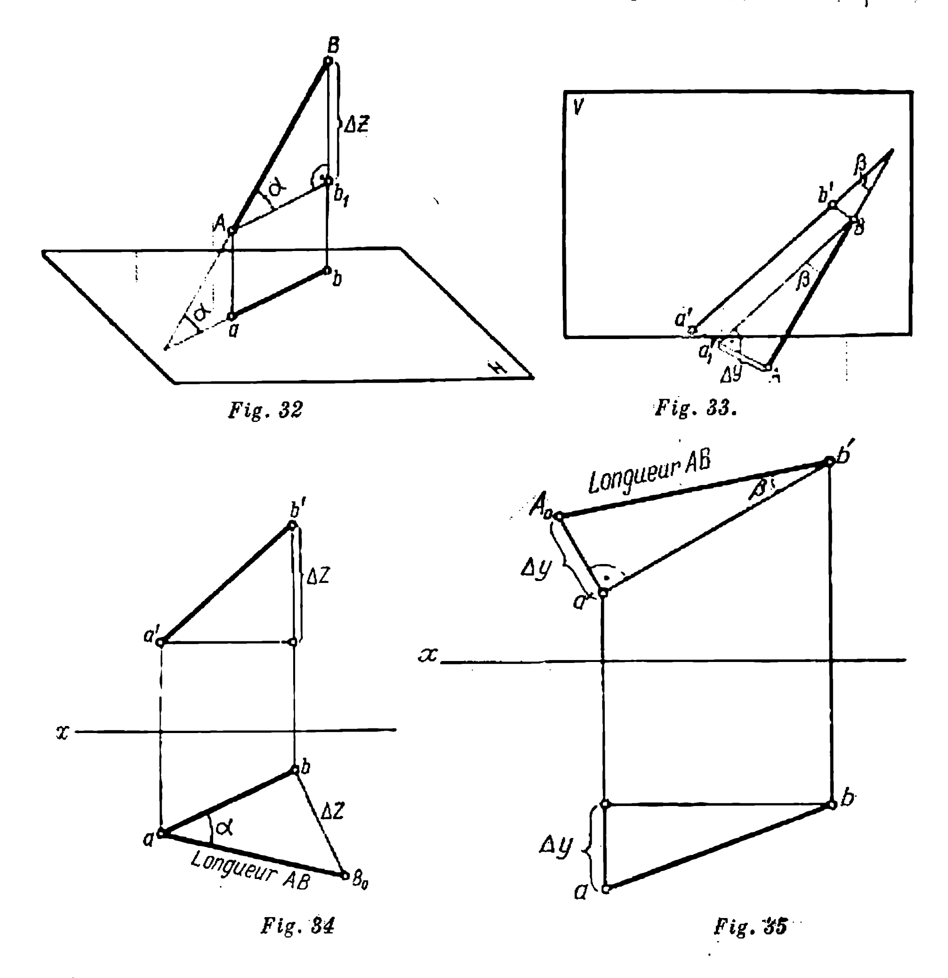


Fig. 32 *Fig. 33.*

Fig. 34 *Fig. 35*

§ 10. Positions relatives d'un point et d'une droite

Si le point C est situé sur la droite AB, ses projections reposent sur les projections de même indice de la droite (fig. 36 et 37). La réciproque : si les projections d'un point sont situées sur les projections de même indice d'une droite, le point considéré lui-même repose sur cette droite, n'est pas toujours vraie.

Ainsi, il est impossible sans recourir à des constructions supplémentaires d'établir la position relative de la droite de profil *EF* et du point *K* d'après deux projections (voir fig. 37).

Dans ce cas particulier, pour juger de la position relative du point et de la droite, il faut construire leurs projections de profil

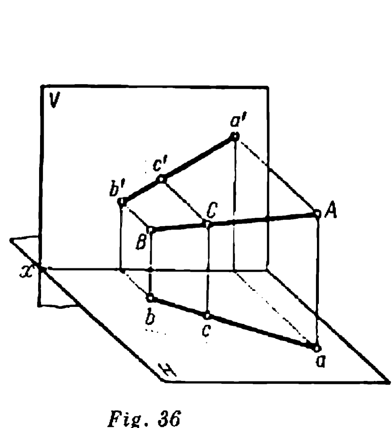


Fig. 36

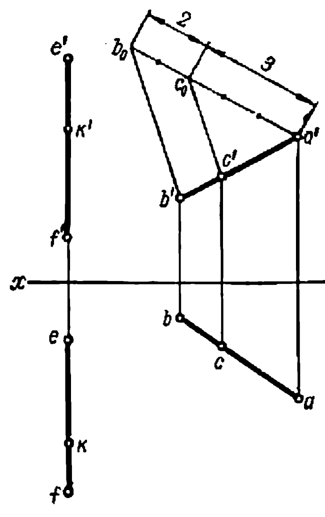


Fig. 37

ou justifier l'égalité

$$\frac{e'k'}{k'f'}=\frac{ek}{kf}.$$

Le point *K* se trouve sur la droite *EF* lorsque l'égalité se vérifie, c'est-à-dire lorsque les projections du point partagent les projections respectives du segment dans le même rapport.

§ 11. Division d'un segment de droite dans un rapport donné

Les propriétés démontrées de la projection parallèle permettent d'en déduire que lorsqu'un point *C* partage un segment *AB* dans un rapport *m* : *n*, les projections du point *C* partagent les projections du segment dans le même rapport. Bref, le rapport des segments d'une droite est égal au rapport de ses projections, c'est-à-dire que (voir fig. 36)

$$\frac{AC}{CB}=\frac{ac}{cb}=\frac{a'c'}{c'b'}.$$

Le segment *AB* de la figure 37 est partagé dans le rapport 3 : 2.

§ 12. Traces d'une droite

On appelle trace d'une droite le point d'intersection de cette droite avec le plan de projection. Dans le cas général une droite peut rencontrer tous les trois plans de projection et avoir trois traces:

trace horizontale M (m, m', m''), point d'intersection de la droite avec le plan H;

trace frontale N (n, n', n''), point d'intersection de la droite avec le plan V, et

trace de profil T (t, t', t''), point d'intersection avec le plan P.

Considérons d'abord la droite AB dans un système de deux plans de projection et trouvons ses traces horizontale et frontale.

Sur la figure 38 ces traces sont déterminées comme les points d'intersection de la droite avec ses projections. Appartenant simultanément à la droite considérée et à un des plans de projection, chaque trace se confond avec sa projection de même indice. Ainsi, M se confond avec m, N avec n'. Quant aux projections d'autres indices que celui de la trace considérée, elles se situent sur la ligne de terre Ox, c'est-à-dire que la projection frontale m' de la trace horizontale M et la projection horizontale n de la trace N reposent sur Ox; de plus, ce sont les points où cet axe rencontre les projections respectives de la droite considérée. L'intersection de ab avec Ox définit n, et celle de $a'b'$ avec le même axe Ox définit m'.

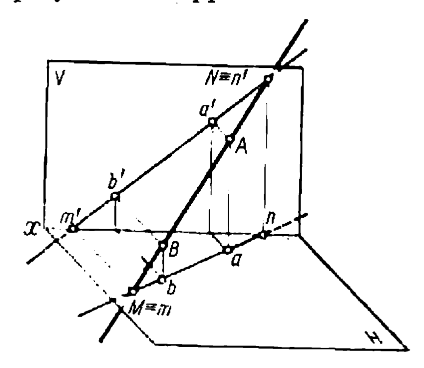


Fig. 38

Ces particularités de la position des projections des traces permettent de formuler les règles suivantes pour la construction des traces sur une épure.

1. La trace horizontale M d'une droite se construit en prolongeant sa projection frontale jusqu'à l'intersection avec la ligne de terre Ox et en élevant en ce point une perpendiculaire à Ox jusqu'à son intersection avec la projection horizontale de la droite.

2. La trace frontale N de la droite s'obtient en élevant au point d'intersection de la projection horizontale avec la ligne de terre Ox une perpendiculaire à Ox jusqu'à son intersection avec la projection frontale de la droite.

Les traces des droites des figures 39 et 40 ont été trouvées d'après ces règles.

Les traces d'une droite étant les points où cette droite passe d'un octant à un autre, elles rendent évidente sa visibilité. *La partie visible d'une droite est celle qui se trouve dans les limites du premier octant.* Les projections correspondant à la partie visible d'une droite sont représentées en trait continu, et celles qui correspondent à ses parties invisibles en pointillé.

Les traces de la droite de profil dont les projections sur *H* et *V* sont perpendiculaires à la ligne de terre (fig. 41 et 42) doivent être considérées avec une attention particulière

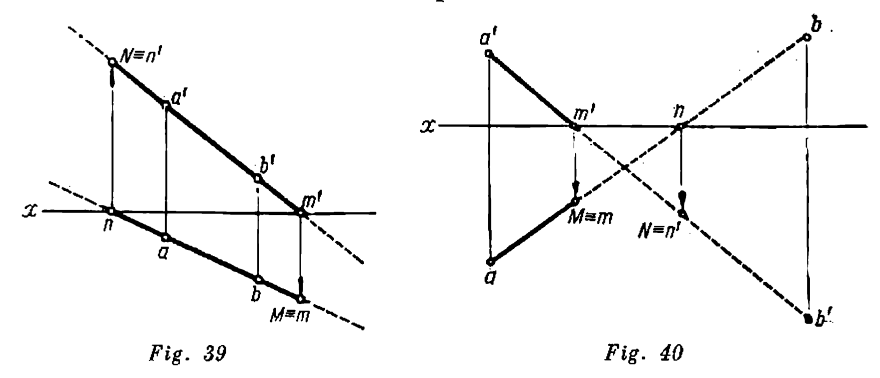


Fig. 39 *Fig. 40*

Ses traces sont impossibles à déterminer directement d'après les projections horizontale et frontale car toutes les droites auxiliaires perpendiculaires à la ligne de terre se confondent avec les projections de la droite considérée. Aussi faut-il faire usage de la projection de

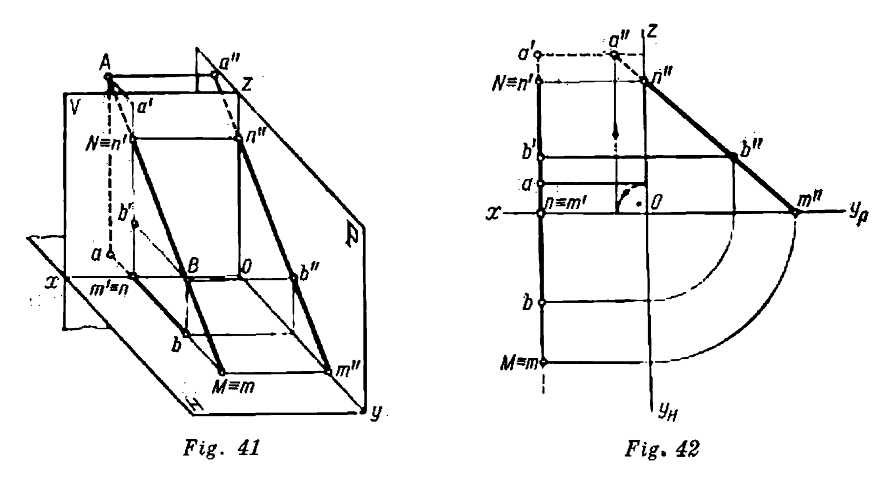


Fig. 41 *Fig. 42*

profil de la droite, dont l'intersection avec l'axe *Oy* définit *m''*, projection de profil de la trace horizontale, et l'intersection avec l'axe *Oz* détermine *n''*, projection de profil de la trace frontale. La construction ultérieure des traces elles-mêmes et de leurs autres projections est rendue claire par les figures 41 et 42.

Considérons la construction des traces d'une droite dans un système de trois plans de projection.

Les traces horizontale et frontale de la droite sont définies par les règles énoncées précédemment.

Il faut en plus déterminer les projections de profil de ces points.

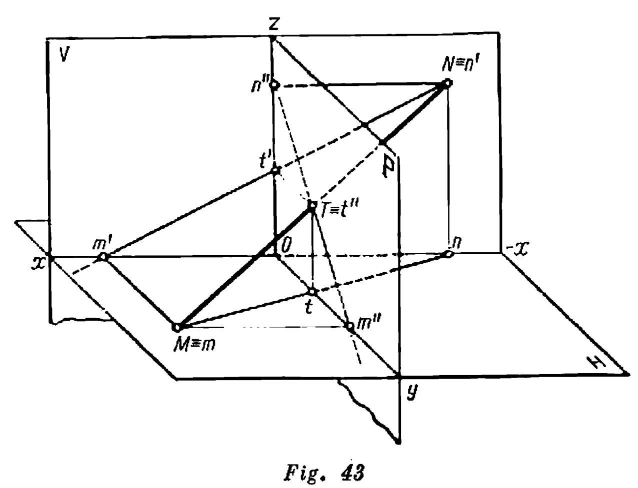


Fig. 43

Sur la figure 43, la trace de profil T est définie par le point d'intersection de la droite MN avec sa projection de profil. La trace T se confond alors avec sa projection de profil de même indice.

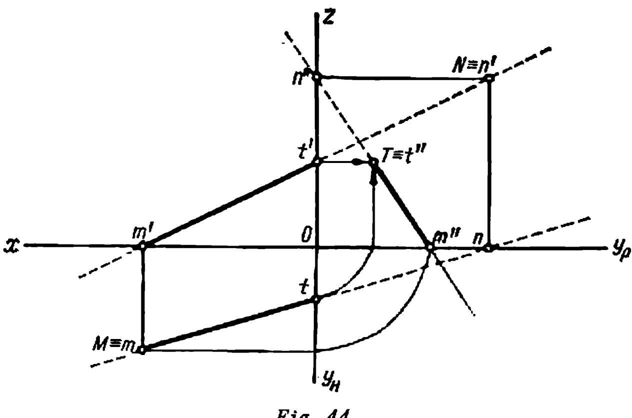


Fig. 44

Les deux autres projections de cette trace, de même que celles d'un point quelconque du plan P, se situent sur les axes Oy et Oz. Puisque le point T appartient à la droite considérée, ses projections t et t' se trouvent sur les projections de même indice de la droite.

Pour déterminer sur l'épure (fig. 44) la trace de profil de la droite et ses projections, il faut :

1. Marquer le point d'intersection de la projection frontale de la droite avec l'axe Oz (point t').

2. Tracer par ce point la perpendiculaire à l'axe Oz jusqu'à son intersection avec la projection de profil de la droite. Le point ainsi obtenu est la trace cherchée T avec laquelle se confond t''.

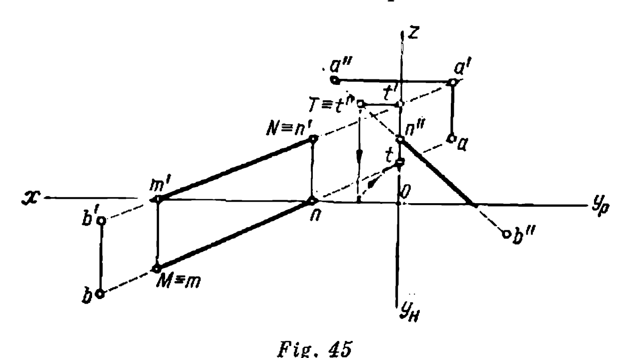


Fig. 45

3. La projection horizontale t est déterminée par l'intersection de la projection horizontale de la droite avec l'axe Oy.

La figure 45 donne un autre exemple de définition des traces d'une droite AB qui passe par les octants VI, II, I et IV.

§ 13. Positions relatives de deux droites

1. Droites concourantes. Ce sont des droites qui ont un point commun dont les projections e et e' reposent sur la même perpendiculaire à la ligne de terre (fig. 46). Donc, *si deux droites sont concourantes, les points d'intersection de leurs projections de même indice sont situés sur la même perpendiculaire (ligne de rappel) à l'axe.*

2. Droites parallèles. Nous avons démontré dans le § 3 que *les projections des droites parallèles sur un plan quelconque sont parallèles.* Cette propriété de la projection parallèle reste vraie pour les projections orthogonales, c'est-à-dire lorsque $AB \parallel CD$, on a $ab \parallel cd$, et $a'b' \parallel c'd'$ (fig. 47).

Dans le cas général, la réciproque est vraie également : si sur une épure les projections de même indice de droites sont parallèles, les droites sont parallèles dans l'espace. En effet, les plans projetants menés par les projections des droites se coupent deux à deux suivant des droites parallèles.

Les droites parallèles à un des plans de projection représentent un cas particulier. Ainsi les projections frontale et horizontale des

droites de profil sont parallèles, mais pour connaître leur position relative, il faut considérer une troisième projection qui permet

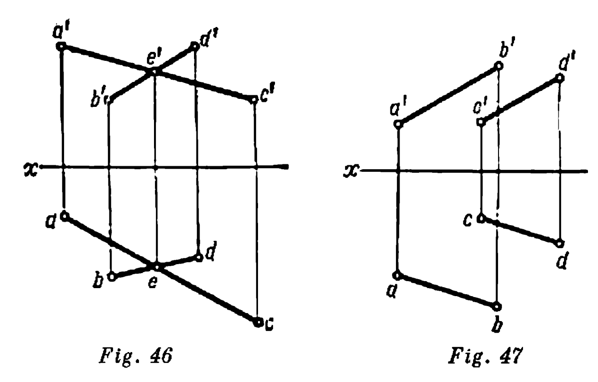


Fig. 46 *Fig. 47*

justement de tirer des conclusions définitives. Les projections de profil des droites AB et CD construites sur la figure 48 autorisent à déduire que $AB \nparallel CD$.

3. Droites gauches. *Si les droites ne sont ni concourantes ni parallèles, les points d'intersection de leurs projections de même indice ne se trouvent pas sur la même ligne de rappel* (fig. 49 et 50).

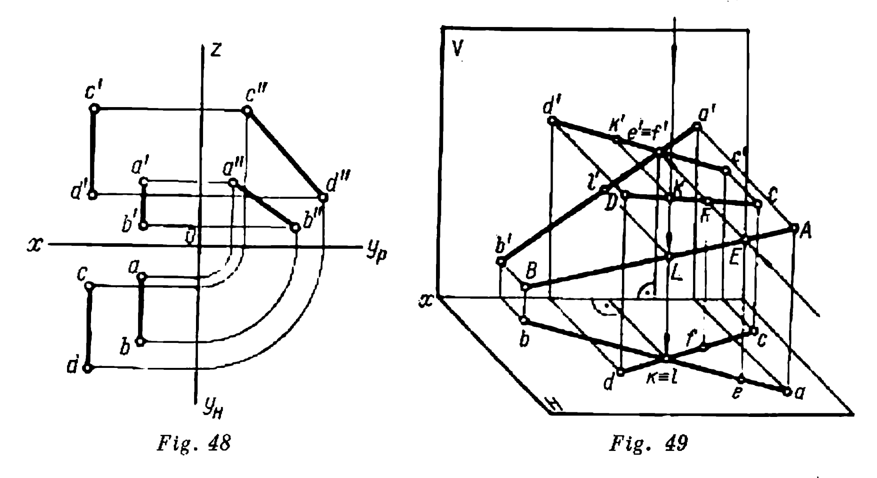


Fig. 48 *Fig. 49*

Le point d'intersection des projections frontales des droites correspond à deux points E et F, dont l'un appartient à la droite AB, et l'autre, à la droite CD. Leurs projections frontales se confondent parce que dans l'espace les deux points E et F se situent sur la même projetante au plan V. La projection horizontale de cette projetante désignée par les flèches (fig. 50) permet d'établir lequel

des deux points est plus proche de l'observateur [1]. Dans notre cas, c'est le point E de la droite AB. Par conséquent, la droite AB passe ici devant la droite CD.

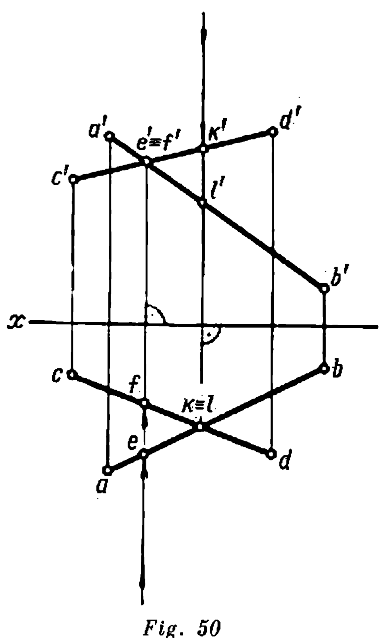


Fig. 50

Le point d'intersection des projections horizontales correspond également aux deux points K et L qui appartiennent à des droites différentes. Leurs projections horizontales se confondent parce que les deux points reposent dans l'espace sur la même projetante au plan H.

La projection frontale de cette projetante marquée par des flèches (fig. 50) renseigne sur la hauteur relative des points.

D'après le dessin, le point K est plus haut que le point L. La droite CD passe donc au-dessus de la droite AB.

§ 14. Droites perpendiculaires

Si deux droites se coupent sous un angle droit, dans le cas général leurs projections forment un angle différent de 90°.

Dans un système orthogonal, *l'angle droit se projette en vraie grandeur si l'un de ses côtés est parallèle à un plan de projection et l'autre n'est pas perpendiculaire à ce même plan.*

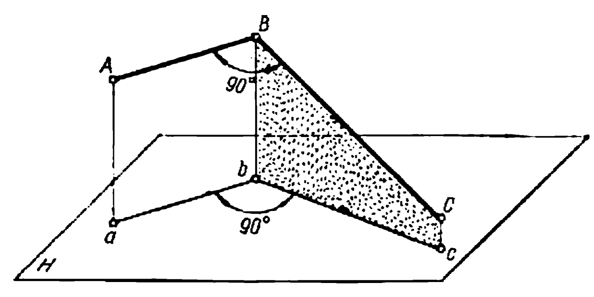


Fig. 51

Soit AB le côté de l'angle droit ABC parallèle au plan H. Il faut démontrer que sa projection l'angle $abc = 90°$ (fig. 51).

[1] On suppose que les droites sont situées entre l'observateur et le plan de projection.

La droite *AB* est perpendiculaire au plan *BCcb* car la droite *AB* est perpendiculaire à deux droites de ce plan *BC* et *Bb* qui passent par le point *B*.

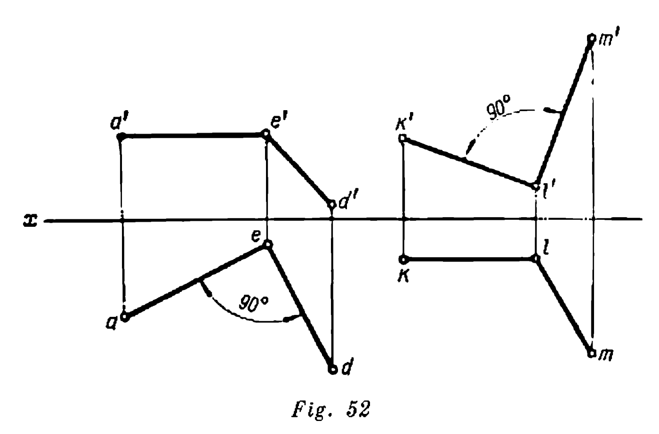


Fig. 52

La droite *AB* et sa projection *ab* sont deux droites parallèles, et donc *ab* est également perpendiculaire au plan *BCcb*. Donc, *ab* est perpendiculaire à *bc*.

Ce qui vient d'être dit permet de déduire que les angles représentés sur la figure 52 sont des projections d'angles droits. Le côté *AE* du premier d'entre eux est parallèle au plan *H* (voir § 8), et le côté *KL* du deuxième, parallèle au plan *V*.

PLAN

§ 15. Détermination d'un plan. Traces d'un plan

La position d'un plan dans l'espace peut être définie par: 1) trois points non alignés (fig. 53); 2) une droite et un point

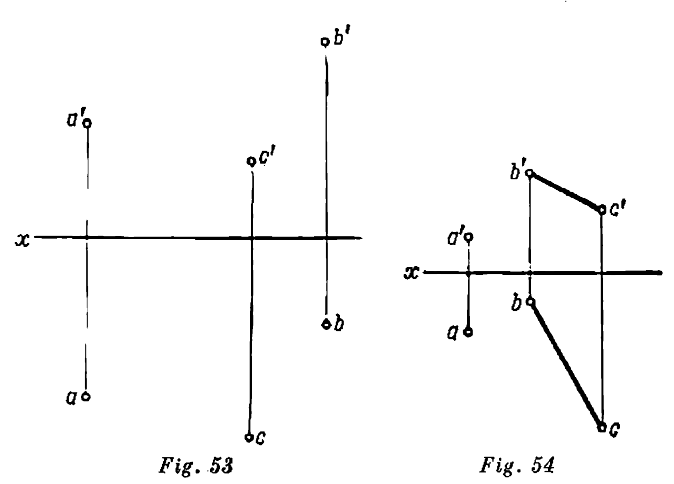


Fig. 53 *Fig. 54*

n'appartenant pas à cette droite (fig. 54); 3) deux droites concourantes (fig. 55); 4) deux droites parallèles (fig. 56).

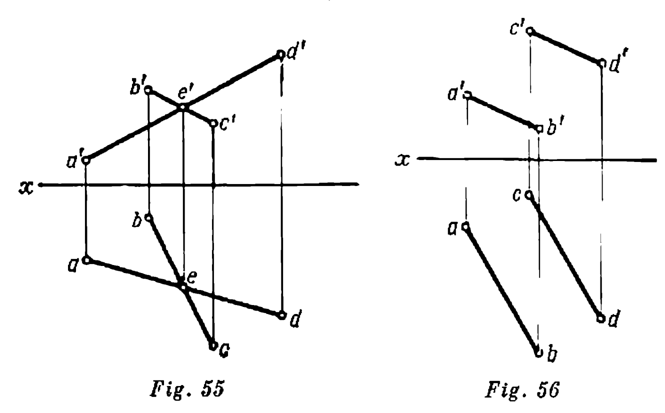


Fig. 55 *Fig. 56*

Chacun de ces modes de définition permet de passer à un autre mode quelconque.

Pour juger de la position d'un plan par rapport aux plans de projection, il est commode de recourir à ses *traces qui sont les droites*

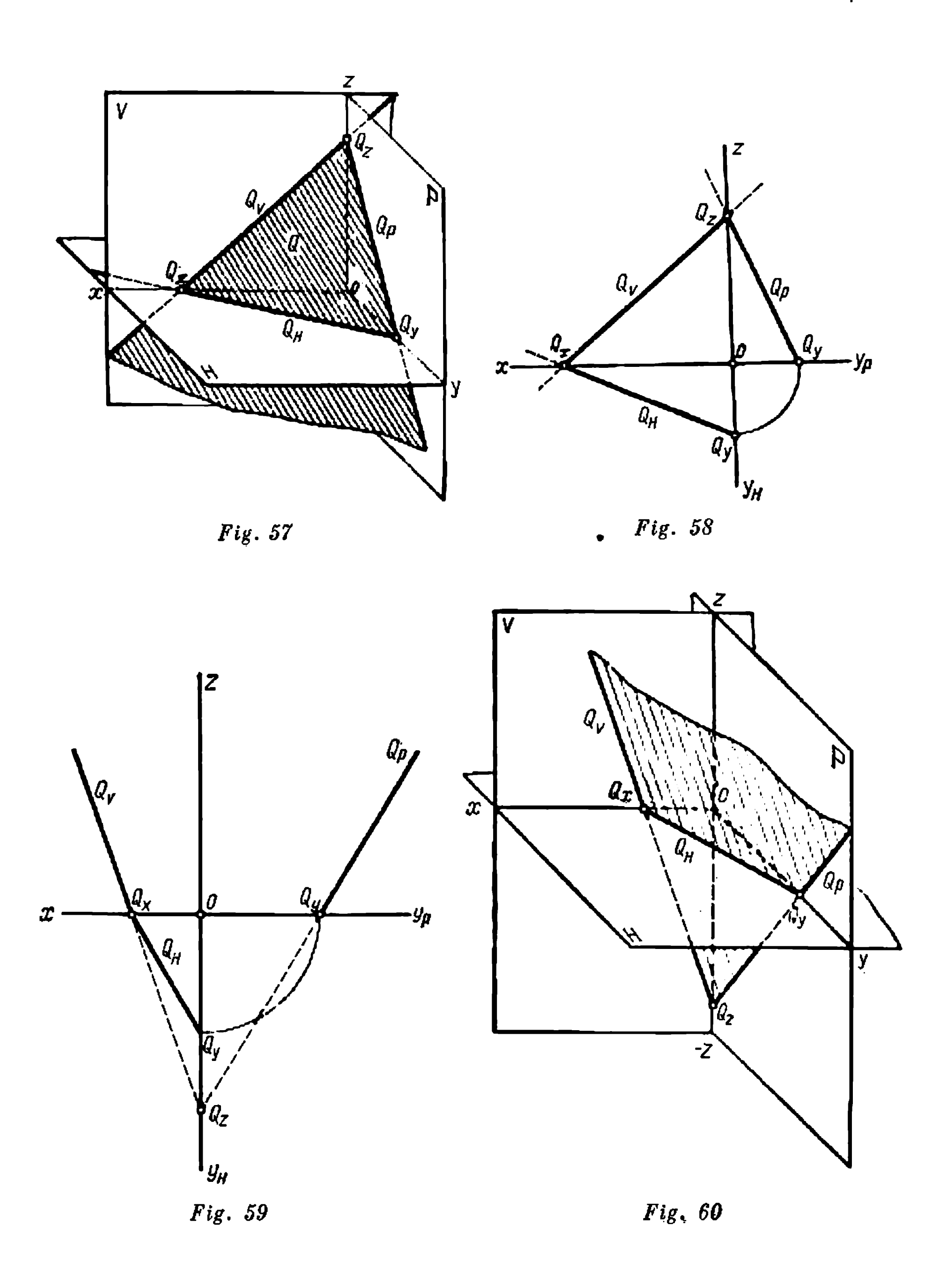


Fig. 57

Fig. 58

Fig. 59

Fig. 60

suivant lesquelles le plan considéré coupe les plans de projection. Un plan quelconque (non perpendiculaire aux trois plans de projection) compte trois traces: horizontale, frontale et de profil.

Désignons par convention les plans de l'espace par des majuscules Q, R, S, . . ., leurs traces par ces mêmes majuscules affectées de l'indice H pour la trace horizontale (Q_H, R_H, S_H, . . .), de l'indice V pour la trace frontale (Q_V, R_V, S_V, . . .) et de l'indice P pour la trace de profil (Q_P, R_P, S_P, . . .).

Un plan quelconque Q est représenté sur la figure 57. Ses traces Q_H, Q_V, Q_P se coupent deux à deux sur les axes en Q_x, Q_y et Q_z qu'on appelle *points de rencontre* des traces. Ces points peuvent être considérés comme les sommets des angles trièdres formés par le plan considéré et deux des trois plans de projection.

Toute trace d'un plan se confond avec sa projection de même indice, ses deux autres projections reposant sur les axes. Ainsi, la trace horizontale du plan se confond avec sa projection horizontale de cette même trace, alors que sa projection frontale se trouve sur l'axe Ox, et sa projection de profil, sur l'axe Oy. Les projections d'indice différent de chaque trace ne sont pas représentées sur l'épure.

Si l'on rabat les plans horizontal et de profil sur le plan frontal on obtient sur l'épure la représentation du plan Q par ses traces (fig. 58).

Notons que le point de rencontre des traces Q_y figure deux fois sur l'épure comme point appartenant à l'axe Oy.

Deux traces quelconques d'un plan, en tant que droites concourantes, définissent complètement la position du plan dans l'espace. La troisième trace du plan peut être toujours construite d'après les deux traces données. La trace de profil Q_P de la figure 59 est construite à l'aide des points de rencontre Q_y et Q_z où les traces données Q_H et Q_V coupent respectivement les axes Oy et Oz. Lors de la représentation des traces d'un plan sur une épure, il faut faire attention à leur visibilité. *La partie visible de chaque trace est celle contenue dans le premier octant.* Le segment de la trace de profil Q_yQ_z (fig. 59, 60), par exemple, est représenté comme invisible, car la partie du plan P dans laquelle ce segment se trouve n'appartient pas au premier octant.

§ 16. Différentes positions d'un plan par rapport aux plans de projection

1. Le plan Q perpendiculaire au plan H s'appelle *plan projetant vertical* (fig. 61 et 62).

Ce plan se distingue sur une épure par sa trace frontale Q_V perpendiculaire à la ligne de terre. L'angle compris entre Q_V et Ox est droit parce que Q_V est l'intersection de deux plans perpendiculaires

à H. Pour la même cause, la trace de profil Q_P forme un angle droit avec l'axe Oy.

Les projections horizontales de tous les points et figures contenus dans ce plan se confondent avec la trace horizontale Q_H. Ainsi la

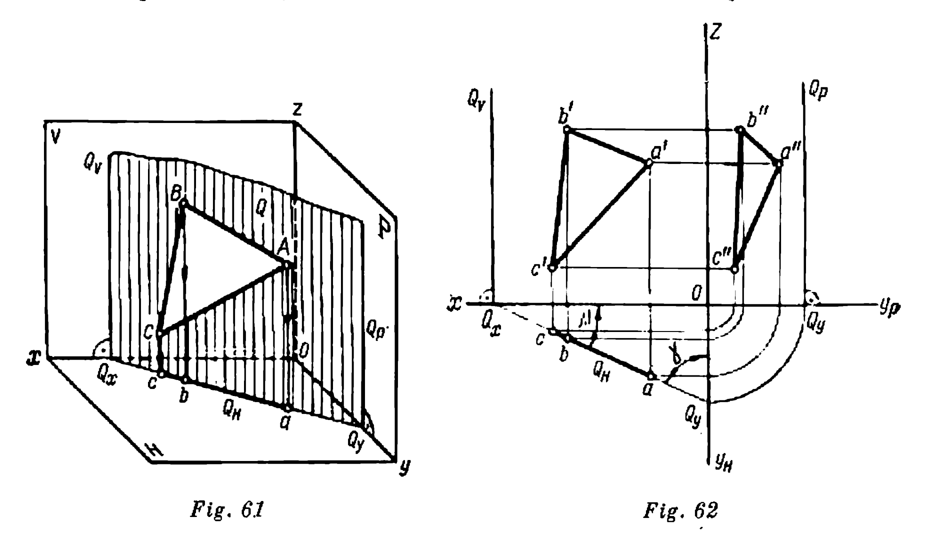


Fig. 61 *Fig. 62*

projection horizontale du triangle ABC situé dans le plan Q est une droite qui se confond avec Q_H (voir fig. 61 et 62).

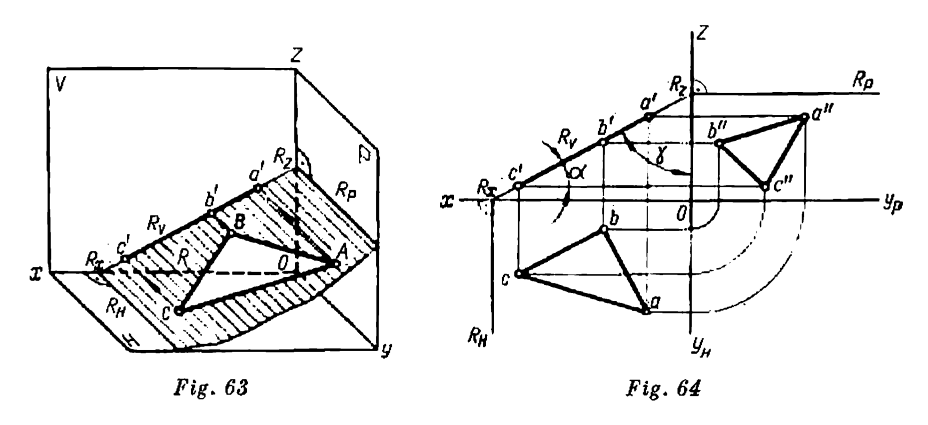


Fig. 63 *Fig. 64*

Les angles β et γ que le plan Q forme avec les plans V et P se projettent sur le plan H en vraie grandeur.

2. Le plan R perpendiculaire au plan V s'appelle *plan projetant de bout* (fig. 63 et 64).

Sur l'épure il est caractérisé par sa trace horizontale R_H perpendiculaire à la ligne de terre. L'angle compris entre R_H et Ox est droit parce que R_H est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan V. Pour la même raison la trace de profil R_P forme un angle droit avec l'axe Oz.

Les projections frontales de tous les points et figures contenus dans ce plan se confondent avec la trace frontale. Ainsi, la projection frontale du triangle ABC qui se trouve dans le plan R est une droite qui se confond avec R_V.

Les angles α et γ formés par le plan R avec H et P se projettent sur le plan V en vraie grandeur.

3. Le plan S perpendiculaire au plan P s'appelle *plan projetant parallèle à la ligne de terre* ou *plan projetant de profil.*

Les figures 65 et 66 représentent le cas particulier lorsqu'un tel plan passe par la ligne de terre et partage l'angle formé par les plans H et V en deux parties égales. Les traces horizontale et frontale de ce plan bissecteur se confondent avec la ligne de terre, alors que la trace de profil fait avec l'axe Oz un angle de 45°.

Les projections de profil de tous les points de ce plan se confondent avec la trace de profil.

4. Le plan T parallèle au plan H (fig. 67 et 68) est dit *horizontal.*

L'axe Oz, perpendiculaire au plan T, forme des angles droits avec ses traces frontale et de profil. Il en résulte que la trace frontale du plan T est parallèle à la ligne de terre, et ce plan n'a pas de trace horizontale.

L'intersection avec V et P sous un angle droit fait que le plan T réunit les propriétés des plans projetants de bout et parallèle à la ligne de terre ; toute figure contenue dans ce plan se projette donc sur V et P en forme de droites qui se confondent avec les traces de même indice. La projection horizontale de cette figure reproduit sa forme en vraie grandeur.

5. Le plan U parallèle au plan V (fig. 69 et 70) s'appelle *plan frontal.*

Etant perpendiculaire au plan U, l'axe Oy forme des angles droits aves ses traces horizontale et de profil. La trace horizontale du plan U est parallèle à Ox, et la trace frontale n'existe pas.

L'intersection de H et de P sous un angle droit confère au plan U les propriétés des plans projetants vertical et parallèle à la ligne de terre. C'est pourquoi une figure quelconque contenue dans ce plan se projette sur les plans H et P sous forme de droites qui se confondent avec les traces de même indice.

La projection frontale de cette figure reproduit sa forme en vraie grandeur.

Pour terminer ce paragraphe, insistons encore une fois sur la propriété principale des plans projetants : *si une ligne ou une figure*

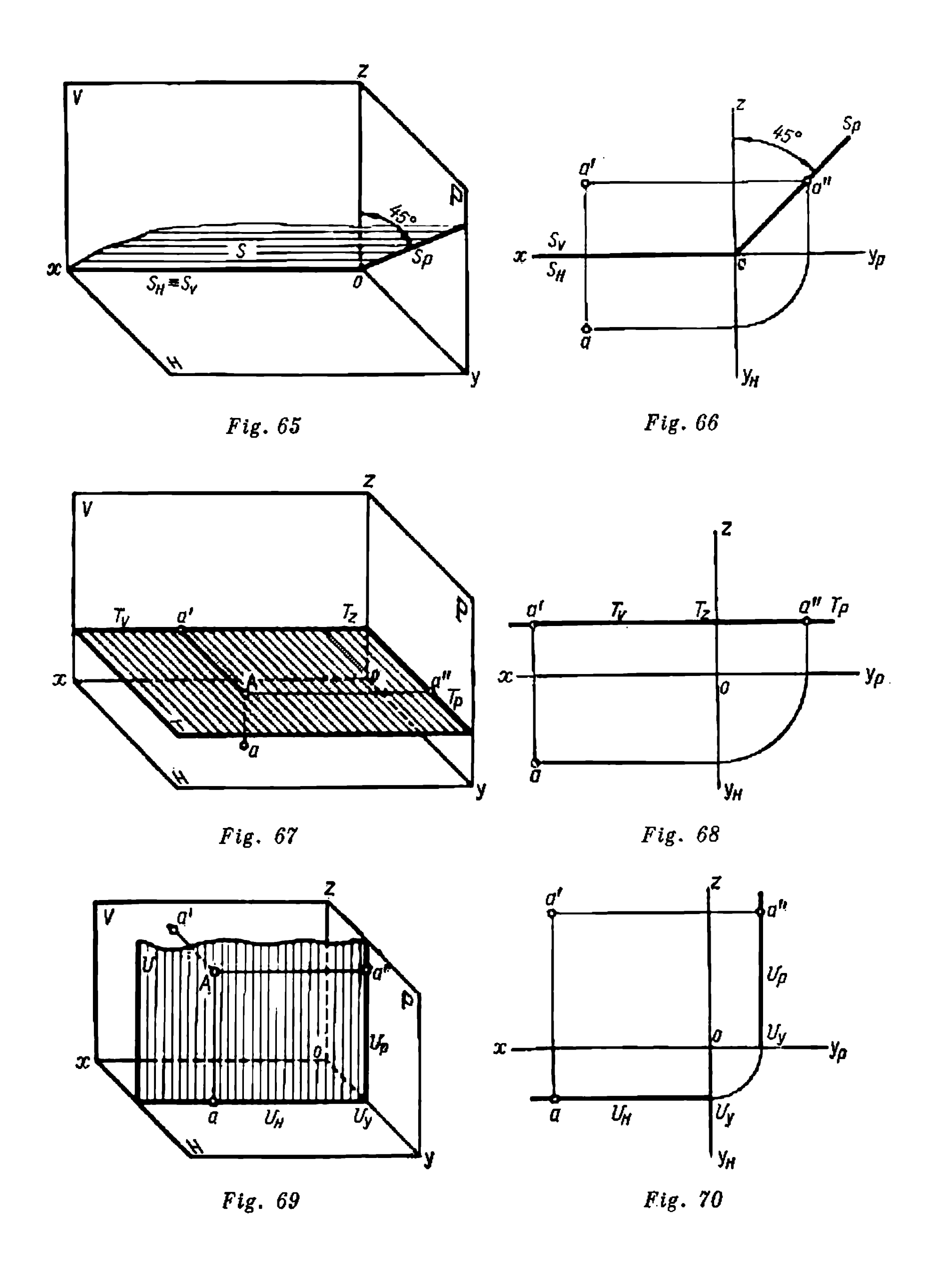


Fig. 65

Fig. 66

Fig. 67

Fig. 68

Fig. 69

Fig. 70

est contenue dans un plan perpendiculaire à un plan de projection, cette ligne ou cette figure se projette sur le plan considéré sous la forme de droite qui se confond avec la trace de même indice du plan projetant. La projection d'une droite située dans un tel plan peut se réduire à un point, mais ce point également se trouve sur la trace de même indice du plan projetant.

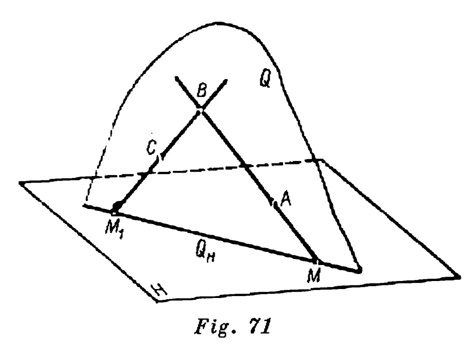


Fig. 71

§ 17. Construction des traces d'un plan

Toute trace d'un plan est une droite ; pour la construire il faut connaître soit deux de ses points, soit un point et la direction.

Les deux points susceptibles de déterminer la position de la trace d'un plan peuvent être les traces de même indice de deux droites appartenant à ce plan.

La figure 71 montre la construction de la trace horizontale du plan Q à l'aide des traces de même indice (c'est-à-dire horizontales) des droites AB et BC qui déterminent la position du plan considéré.

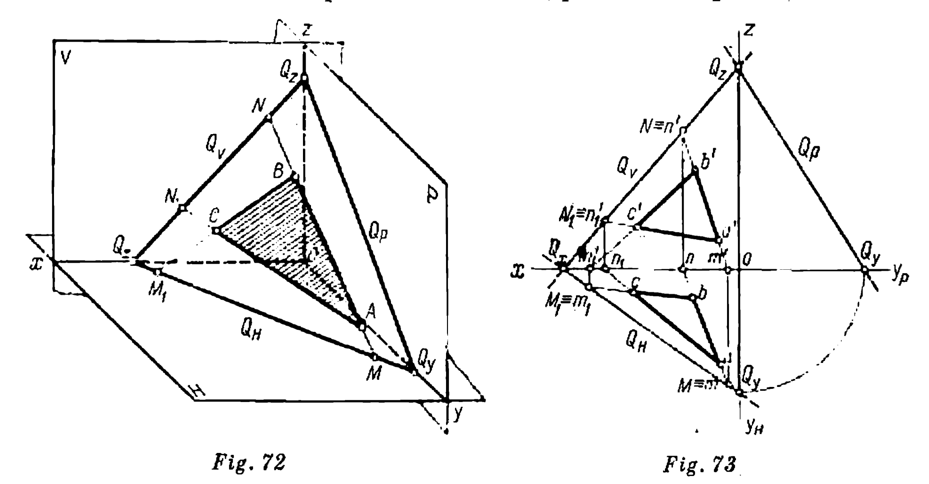


Fig. 72 *Fig. 73*

Les figures 72 et 73 donnent un exemple de construction des traces d'un plan donné par trois points. La trace horizontale du plan est définie par les traces horizontales M et M_1 des droites AB et BC. La trace frontale est construite à l'aide des traces de même

indice N et N_1 des droites AB et AC. Notons qu'on aurait pu construire Q_V à partir de la trace frontale d'une des droites et du point de rencontre Q_x.

Enfin, les points de rencontre des traces Q_y et Q_z permettent de construire la troisième trace du plan, celle de profil Q_P.

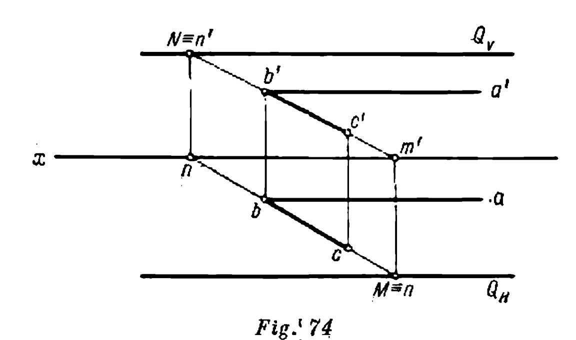


Fig. 74

Si les points de rencontre Q_y et Q_z se situaient en dehors du dessin, pour construire Q_P il faudrait définir les traces de profil de deux droites du plan.

Soit à construire les traces d'un plan lorsqu'une des deux droites qui déterminent la position de ce plan est parallèle à l'axe Ox (fig. 74). Le plan Q et ses traces Q_H et Q_V sont alors parallèles à Ox. Pour construire Q_H et Q_V, il faut donc trouver un point sur chaque plan de projection par lequel doit passer la trace de même indice. Ces points sont les traces M et N de la deuxième droite BC.

§ 18. Droites et points contenus dans le plan donné

Si une droite AB située dans le plan Q est prolongée jusqu'à son intersection avec les traces du plan en M et N, les points ainsi obtenus constituent les traces de la droite donnée sur les plans de projection (fig. 75). Donc, *si une droite est contenue dans un plan, ses traces reposent sur les traces de même indice de ce plan.*

Une droite peut appartenir à un plan et être parallèle à l'une de ses traces. La droite doit avoir alors un point commun avec une autre trace du plan. (Les droites de ce type sont étudiées au paragraphe suivant.)

Sur une épure un plan n'est pas toujours donné par ses traces. Comment dans ce cas tracer des droites sur ce plan sans construire les traces de celui-ci ?

Le plan de la figure 76 est déterminé par deux droites concourantes. Pour tracer sur ce plan une droite quelconque, prenons deux

points *I* et *II*, le premier sur la droite *AB*, le deuxième sur *BC*. En joignant les projections de même indice de ces points, on obtient

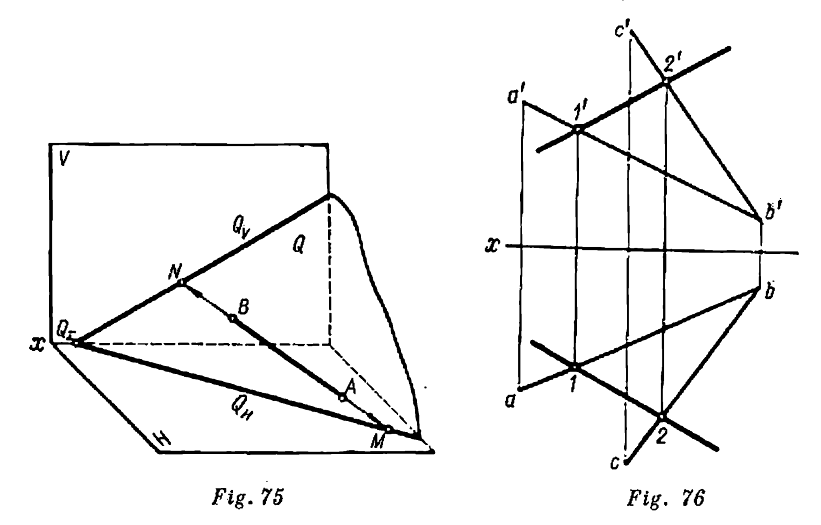


Fig. 75 *Fig. 76*

les projections *1—2* et *1'—2'* de la droite *I—II*. La droite ainsi obtenue appartient au plan considéré car elle a deux points communs avec ce plan.

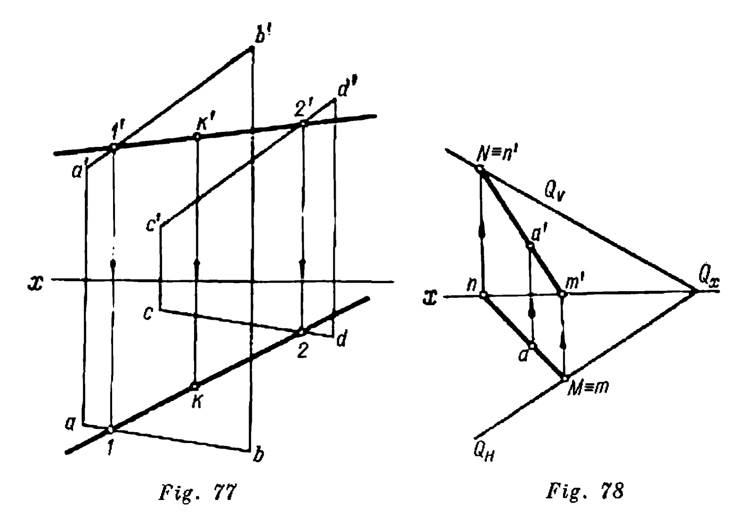


Fig. 77 *Fig. 78*

Une autre opération graphique très fréquente dans le cas d'un plan consiste à rechercher sur ce plan des points isolés.

Posons le problème suivant: *trouver la projection horizontale du point K contenu dans un plan donné par deux droites parallèles AB et CD, si la projection frontale k' du point est connue* (fig. 77).

Supposons dans un plan une certaine droite *I—II* qui passe par le point *K*. La projection frontale *1'—2'* de cette droite doit passer par la projection donnée *k'* du point *K*.

La deuxième projection de la droite est définie par les projections horizontales des points *I* et *II* d'intersection de la droite auxiliaire

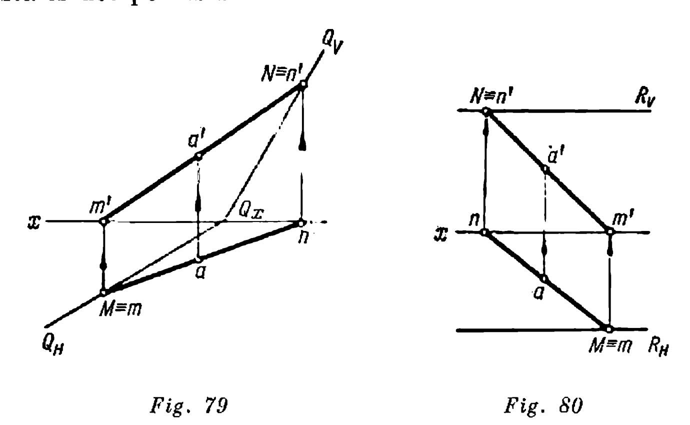


Fig. 79 *Fig. 80*

avec les deux droites considérées. La projection horizontale recherchée du point *K* se situe sur la projection de même indice de la droite *I—II*. Les figures 78 à 80 donnent les solutions de problèmes analogues pour un plan déterminé par ses traces. La solution s'obtient également à l'aide d'une droite *MN* qui dans chaque cas passe par le point *A* du plan.

Les projections horizontales des points représentées sur les épures sont supposées données.

La solution de toute une série de problèmes nécessite la construction des points qui appartiennent à telle ou telle surface. Dans ces cas, il est d'usage de tracer sur la surface donnée une ligne pour déterminer ensuite sur cette ligne la position du point recherché.

§ 19. Droites remarquables d'un plan

Parmi les droites qui peuvent être contenues dans un plan une place particulière revient aux droites de quatre directions.

1. *Horizontales* ou droites contenues dans un plan et parallèles au plan horizontal de projection (fig. 81).

2. *Frontales* ou droites contenues dans un plan et parallèles au plan frontal *V* (fig. 82).

3. *Droites de profil* contenues dans un plan et parallèles au plan P (fig. 83).
4. *Lignes de plus grande pente*, droites tracées sur le plan et perpendiculaires aux horizontales (fig. 84 et 85).

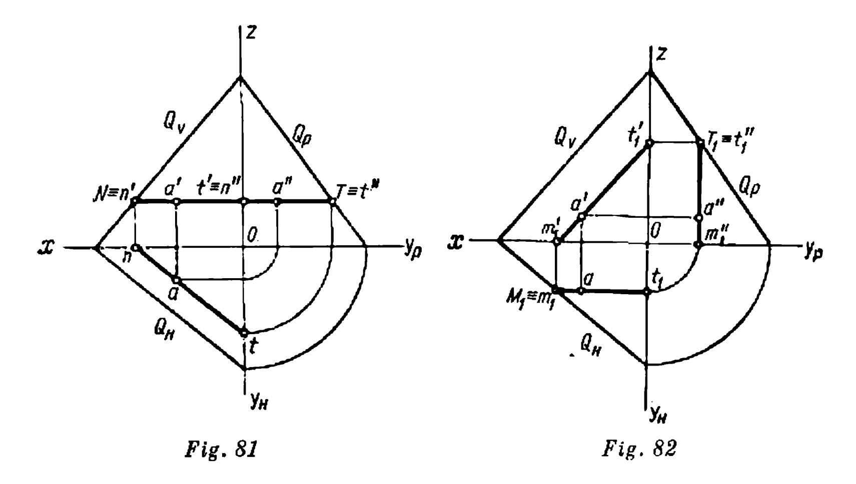


Fig. 81 *Fig. 82*

Toutes ces droites sont dites *remarquables*. Les trois premières d'entre elles représentées sur la figure 86 déterminent la direction

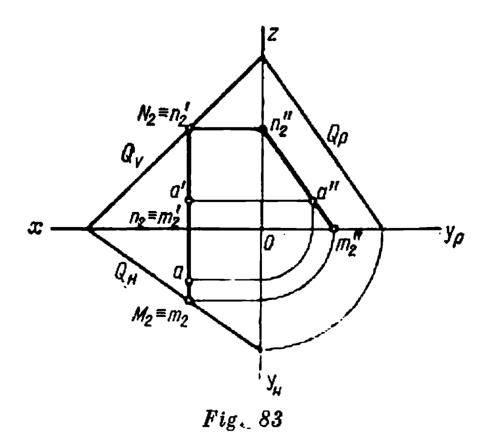


Fig. 83

des traces respectives du plan: l'horizontale $NT \parallel Q_H$, la frontale $M_1T_1 \parallel Q_V$ et la droite de profil $N_2M_2 \parallel Q_P$.

Le nombre de droites remarquables qu'on peut tracer sur un plan quelconque est infini. Toutes les droites d'une quelconque des quatre directions considérées forment un faisceau plan de droites parallè-

les, c'est-à-dire toutes les horizontales du plan sont parallèles entre elles, toutes les frontales le sont également, etc.

Les épures 81 à 83 représentent les projections des trois premières droites remarquables.

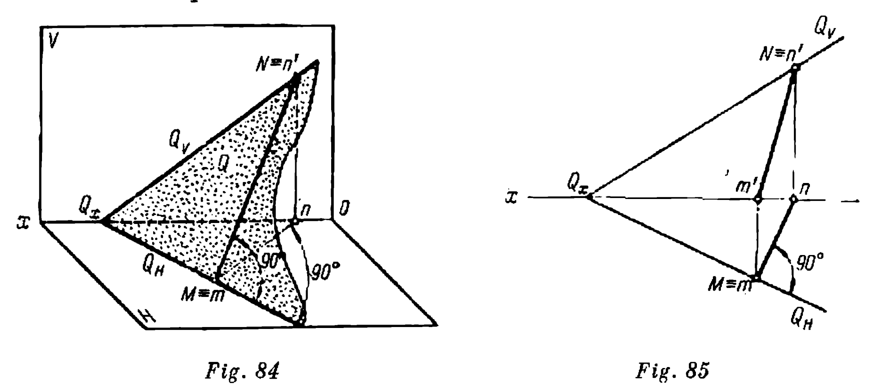


Fig. 84 *Fig. 85*

Les caractéristiques de ces projections sont indiquées dans le tableau suivant:

Droites remarquables du plan	Projections		
	horizontale	frontale	de profil
Horizontale	$\parallel Q_H$	$\parallel Ox$	$\parallel Oy$
Frontale	$\parallel Ox$	$\parallel Q_V$	$\parallel Oz$
Droite de profil	$\parallel Oy$	$\parallel Oz$	$\parallel Q_P$

La ligne de plus grande pente est caractérisée par sa projection horizontale perpendiculaire à la trace horizontale du plan.

En effet, considérons trois droites MN, mn et Q_H concourantes en M (voir fig. 84). La première d'entre elles est oblique par rapport au plan H, la deuxième est la projection de cette oblique, et la troisième est la perpendiculaire à l'oblique tracée sur le plan H. Mais si $MN \perp Q_H$, le théorème de trois perpendiculaires permet d'affirmer que $mn \perp Q_H$. Ainsi la ligne de plus grande pente et sa projection horizontale sont perpendiculaires à Q_H. Elles forment donc un angle plan, dit rectiligne, qui mesure le dièdre composé par les plans Q et H.

La construction de la ligne de plus grande pente sur une épure doit débuter par la projection horizontale menée perpendiculairement à la trace horizontale du plan ou à la projection horizontale

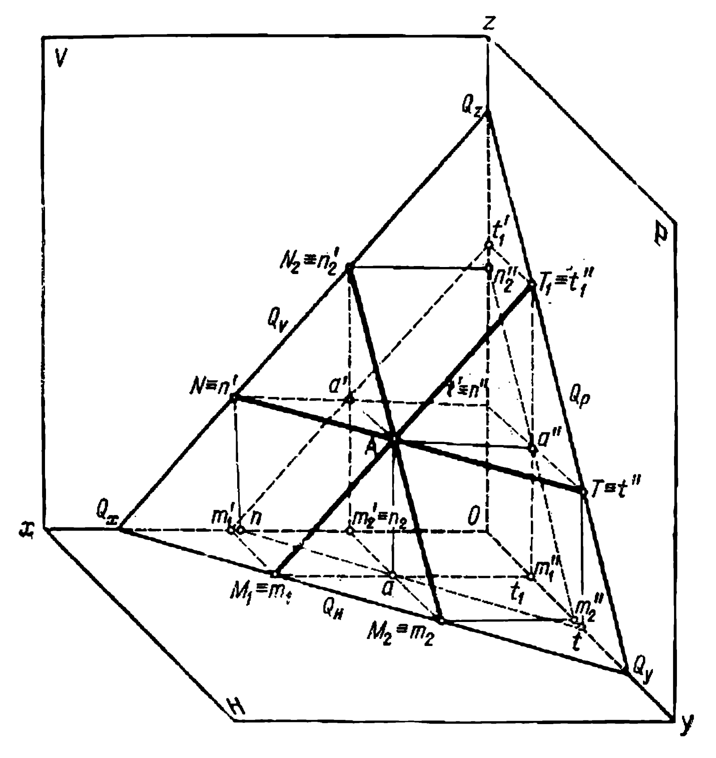

z
V
Q_z
P
t_1'
$N_2 \equiv n_2'$
n_2''
$T_1 \equiv t_1''$
Q_V
$N \equiv n'$
a'
$t' \equiv n''$
Q_P
A
a''
$T \equiv t''$
Q_x
x
m_1'
n
$m_2' \equiv n_2$
0
m_1''
$M_1 \equiv m_1$
a
t_1
Q_H
m_2''
$M_2 \equiv m_2$
t
Q_y
H
y

Fig. 86

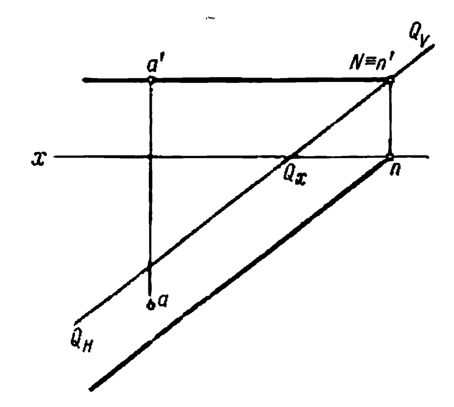

Q_V
a'
$N \equiv n'$
x
Q_x
n
a
Q_H

Fig. 87

d'une horizontale quelconque du plan considéré. La projection frontale de cette ligne peut être déterminée à l'aide des projections frontales m' et n' de ses traces (voir fig. 85).

Les droites remarquables d'un plan rendent plus aisée la solution des problèmes sur la position relative d'un point et d'un plan. La figure 87 donne le plan Q et les projections a et a' d'un point A. Il faut établir si le point est contenu dans ce plan. Menons sur le plan une horizontale au même niveau que le point A $(z_N = z_A)$. La projection frontale de l'horizontale passe par a' parallèlement à l'axe Ox. La trace frontale N de cette droite se situe sur Q_V, et la projection horizontale du point N doit se trouver sur Ox. La deuxième projection de l'horizontale passe par n parallèlement à la trace Q_H. La projection horizontale a du point A est en dehors de la projection de même indice de la droite. On en déduit que le point A n'est pas situé dans le plan Q.

§ 20. Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent se couper ou être parallèles. Dans des cas particuliers, les plans qui se coupent peuvent être perpendiculaires (cas examiné plus loin), alors que les plans parallèles peuvent se confondre.

1. Plans parallèles. Deux plans sont parallèles lorsque deux droites concourantes de l'un sont parallèles à deux droites concourantes de l'autre.

On sait que deux plans parallèles sont coupés par un troisième suivant des droites parallèles. Donc, *les traces de même indice des plans parallèles sont parallèles* (fig. 88). Les projections de même indice des droites remarquables correspondantes sont dans ce cas également parallèles.

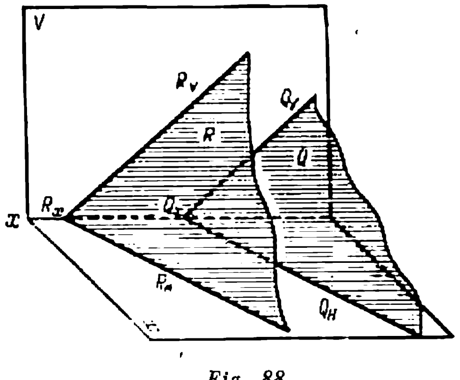


Fig. 88

Pour juger du parallélisme des plans projetants parallèles à la ligne de terre, il faut construire leurs traces de profil comme sur la figure 89. La position relative de Q_P et de R_P montre que les plans considérés se coupent.

Il arrive souvent que pour résoudre des problèmes, il faut mener par le point donné A un plan R parallèle au plan donné Q.

Si le plan Q est déterminé par deux droites concourantes A_1B_1 et A_1C_1, le plan recherché se construit à l'aide des droites AB et AC

respectivement parallèles à A_1B_1 et A_1C_1 et passant par le point donné A (fig. 90).

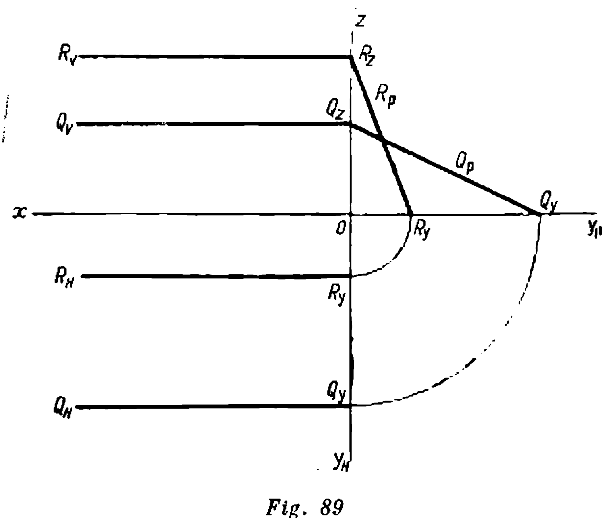


Fig. 89

Si le plan Q est donné par ses traces, il suffit de mener par A une seule des droites remarquables du plan recherché, l'horizontale par exemple (fig. 91). Sa projection frontale est parallèle à l'axe Ox,

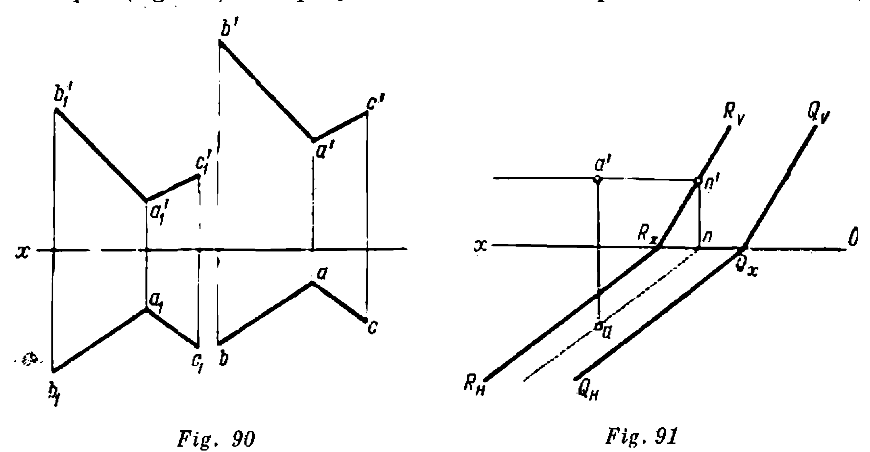


Fig. 90

Fig. 91

et sa projection horizontale, à la trace Q_H. La trace frontale du plan recherché passe par la trace de même indice de l'horizontale parallèlement à Q_V. Enfin, la deuxième trace du plan recherché est menée par le point de rencontre R_x parallèlement à Q_H.

2. Intersection des plans. La ligne d'intersection de deux plans est une droite ; pour la construire il suffit de déterminer soit deux points communs aux deux plans, soit un point et la direction de la droite envisagée.

Considérons d'abord le cas particulier de l'intersection des plans, dont l'un est parallèle à l'un des plans de projection. Montrons que le plan T parallèle au plan H coupe un plan quelconque Q suivant une horizontale (fig. 92). On sait que deux plans parallèles

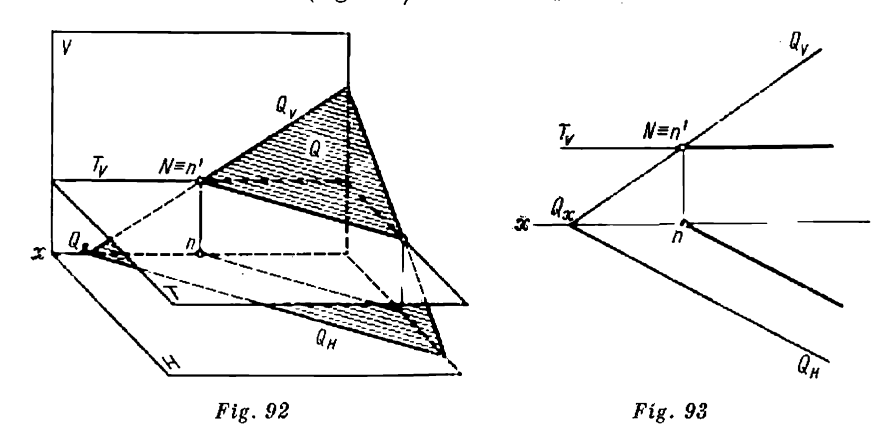


Fig. 92 *Fig. 93*

(T et H) sont coupés par un troisième (Q) suivant des droites parallèles. Nous en déduisons que la droite cherchée suivant laquelle le plan Q coupe le plan T doit être parallèle à la droite d'intersection de Q et de H, c'est-à-dire à la trace Q_H. Mais une droite du plan Q parallèle à Q_H est une horizontale. Quant au point N par lequel doit passer cette ligne, il est déterminé par l'intersection des traces frontales des plans donnés.

L'épure de la figure 93 donne la solution du problème. La projection frontale de la droite cherchée se confond avec la trace T_V, alors que la projection horizontale est parallèle à Q_H.

Un raisonnement analogue permet de démontrer que le plan U parallèle au plan V coupe un plan quelconque suivant une frontale (fig. 94). La projection horizontale de la droite d'intersection des plans se confond dans ce cas avec U_H, et la projection frontale est parallèle à Q_V.

Considérons maintenant le cas général en partant de ce cas particulier d'intersection des plans. Soient Q et R deux plans quelconques de l'espace (fig. 95) ; il faut construire leur droite d'intersection.

On coupe les plans donnés par un plan auxiliaire T_1 qu'il est recommandé de choisir parallèle à H ou à V. Dans notre cas, $T_1 \parallel H$

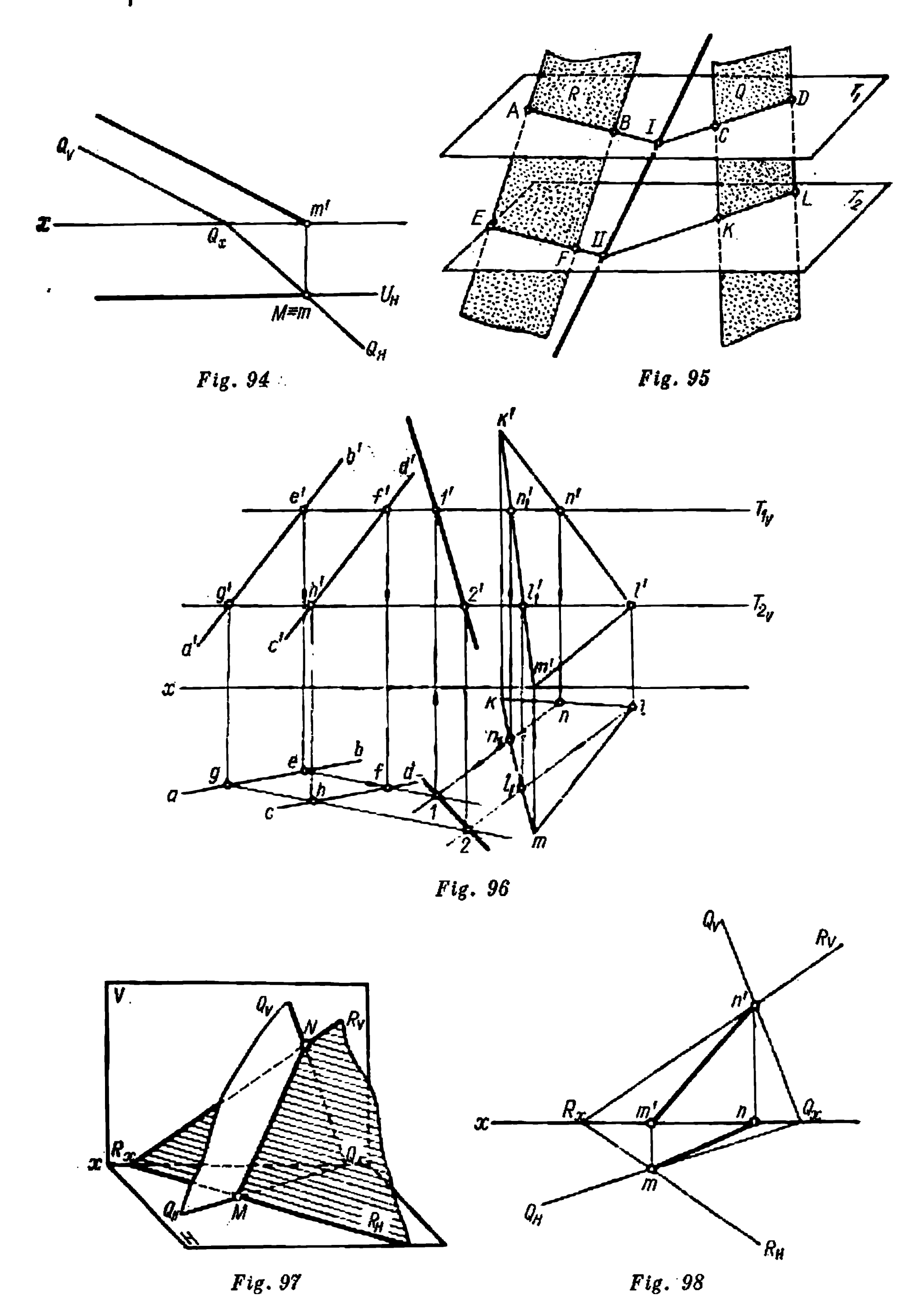


Fig. 94

Fig. 95

Fig. 96

Fig. 97

Fig. 98

coupe chacun des deux plans donnés suivant les horizontales AB et CD qui déterminent le point I commun aux deux plans Q et R et qui appartient donc à la ligne de leur intersection.

Prenant un deuxième plan auxiliaire T_2 également parallèle à H, on obtient encore un point II, commun aux plans Q et R. Ce point est déterminé par l'intersection des horizontales EF et KL, suivant lesquelles le plan auxiliaire T_2 coupe chacun des deux plans donnés.

Cette méthode est appliquée pour construire sur une épure les projections de la droite d'intersection de deux plans, dont l'un

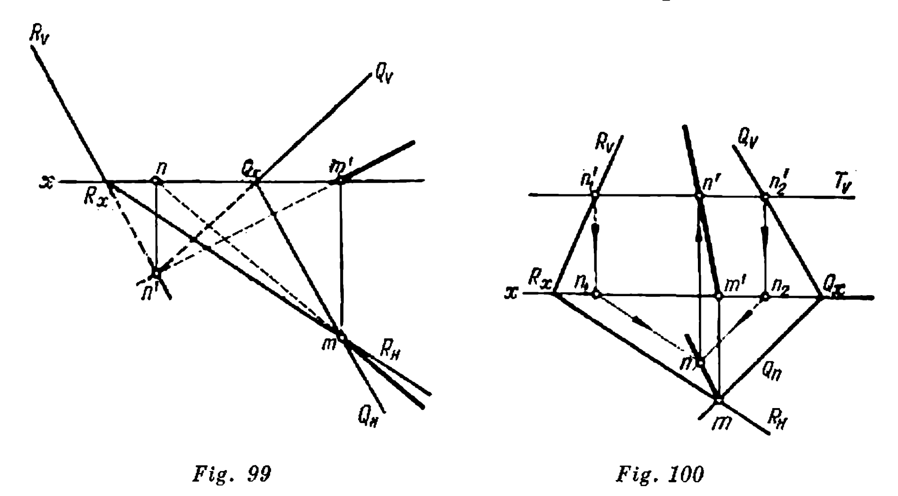


Fig. 99 *Fig. 100*

est déterminé par deux droites parallèles, et l'autre par trois points (fig. 96). Le plan auxiliaire T_1 sert à trouver le point I d'intersection des horizontales EF et NN_1. Le deuxième point II est déterminé de la même façon à l'aide du plan T_2.

Les figures 97 à 102 donnent des exemples de construction de la droite d'intersection de deux plans déterminés par leurs traces.

Relevons les particularités propres à ces exemples.

Dans le premier cas (fig. 97 et 98), la droite recherchée est construite à l'aide des points d'intersection des traces de même indice des plans donnés. Ces points M et N sont les traces d'une droite, et puisqu'ils sont situés l'un et l'autre sur les traces des deux plans, on en déduit que la droite MN appartient aux deux plans, elle représente donc leur ligne d'intersection.

L'exemple de la figure 99 donne le point N d'intersection des traces frontales des plans considérés, qui se trouve dans le demi-plan inférieur V. Les autres constructions sont analogues à celles de la figure 98.

L'exemple suivant (fig. 100) se distingue par le fait que les traces frontales des plans considérés ne se coupent pas dans les limites du dessin. L'un des points (M) de la droite recherchée est déterminé par l'intersection des traces horizontales des plans. Pour trouver l'autre, il faut faire appel à un plan horizontal auxiliaire. Ce plan coupe chacun des plans donnés suivant une horizontale.

L'intersection de ces derniers détermine justement le deuxième point N de la droite recherchée. Si le deuxième couple de traces

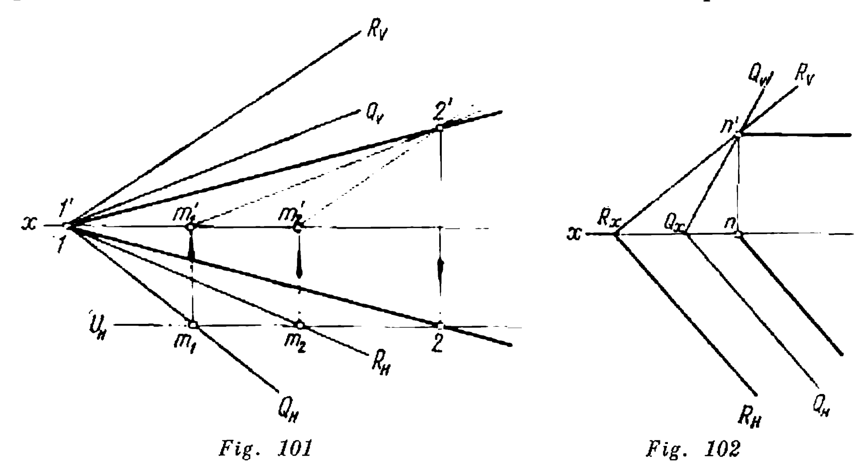


Fig. 101 *Fig. 102*

ne se coupe pas non plus dans les limites du dessin, il faut prendre encore un plan auxiliaire (parallèle à H ou à V, par exemple).

Dans l'exemple suivant, le plan auxiliaire U parallèle à V permet de trouver un deuxième point commun aux deux plans Q et R qui coupent la ligne de terre au même point I (fig. 101).

Lorsque deux traces de même indice sont des droites parallèles (fig. 102), la ligne d'intersection des plans est une droite parallèle à ces traces [1]. Ainsi, dans notre exemple, deux plans aux traces horizontales parallèles se coupent suivant une horizontale commune qui passe par le point N déterminé par l'intersection de Q_V et R_V.

§ 21. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Trois cas peuvent se présenter :

1) la droite est contenue dans un plan ;
2) la droite est parallèle à un plan ;
3) la droite coupe un plan.

---

[1] Cette affirmation est fondée sur le théorème suivant de la géométrie dans l'espace : deux plans non parallèles qui passent par deux droites parallèles données se coupent suivant une droite parallèle aux droites considérées.

Le premier cas a été examiné au § 18 consacré à l'une des opérations graphiques principales : la construction des droites dans un plan. On sait qu'une droite qui joint deux points d'un plan donné y est contenue par tous ses points.

Il est évident qu'une droite qui n'a pas deux points communs avec un plan coupe ce plan ou lui est parallèle. Pour préciser cette idée, on mène par la droite AB (fig. 103) un plan auxiliaire R et on établit la position relative des deux droites AB et MN, cette dernière étant la droite d'intersection du plan auxiliaire R avec le plan considéré Q. Chacun des trois cas possibles de la position relative de ces droites correspond à un cas analogue de position relative d'une droite et d'un plan.

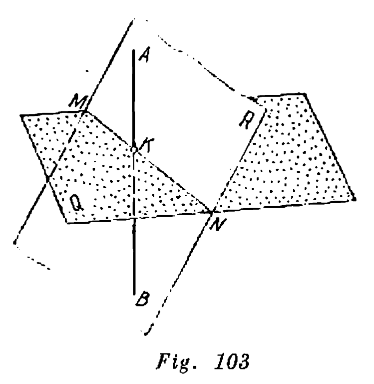


Fig. 103

Par conséquent, si les deux droites se confondent, la droite AB se trouve dans le plan Q, si les droites sont parallèles, AB est parallèle à ce plan, et enfin, si les droites sont concourantes, AB coupe le plan Q. Les deux derniers cas imposent une étude plus poussée.

§ 22. Droite parallèle à un plan

Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, il faut faire appel à la proposition connue de la géométrie dans l'espace : *une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à l'une des droites contenues dans ce plan.*

Par la méthode exposée au paragraphe précédent, établissons la position relative de la droite AB et du plan représentés sur les figures 104 et 105, le plan de la première étant déterminé par trois points C, D, E et celui de la deuxième par les traces Q_V et Q_H.

Dans les deux cas, menons tout d'abord par la droite AB un plan auxiliaire R. Il est très commode d'utiliser à cette fin l'un des plans projetants. Dans les exemples considérés, on fait passer par la droite AB le plan projetant vertical R dont la trace horizontale se confond avec la projection de même indice de la droite. On construit ensuite les projections mn et $m'n'$ de la droite d'intersection des plans ; en les confrontant avec les projections de la droite considérée, on a AB parallèle au plan du triangle CDE (fig. 104) et non parallèle au plan Q déterminé par ses traces (fig. 105).

Cette dernière conclusion peut être tirée également sans recourir à la construction considérée. En effet, la projection frontale de

la droite donnée est parallèle à Q_V. On peut donc supposer la droite AB parallèle à toutes les frontales du plan. Mais puisque la projec-

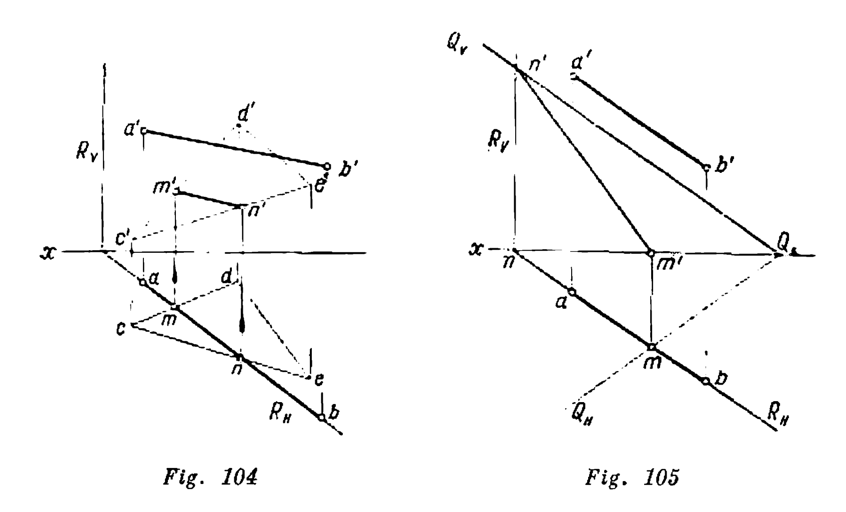


Fig. 104 *Fig. 105*

tion horizontale AB n'est pas parallèle à l'axe Ox, cette supposition ne se vérifie pas, et par conséquent AB n'est pas parallèle au plan Q.

§ 23. Intersection d'une droite et d'un plan

Des problèmes de la géométrie descriptive, celui que nous allons étudier dans ce paragraphe est l'un des plus importants. L'étude fructueuse de ce qui suit dépend de la bonne assimilation de cette question. Nombre de problèmes du cours se ramènent en définitive à la détermination du point d'intersection d'une droite et d'un plan, dont l'intersection d'une droite et d'un polyèdre, l'intersection d'un plan et d'un polyèdre, d'un cône, d'un cylindre ou d'une surface réglée quelconque, l'intersection de deux polyèdres.

D'après la méthode exposée au § 21, le problème de l'intersection d'une droite et d'un plan se résout en trois étapes :

1) *construire un plan auxiliaire R mené par la droite donnée AB* ;

2) *construire la droite d'intersection du plan auxiliaire R et du plan donné Q* (*droite MN*) ;

3) *définir le point recherché K, comme point d'intersection de la droite donnée AB et de la droite construite MN* (voir fig. 103).

Nous avons déjà dit au § 22 qu'il est recommandé de choisir le plan auxiliaire parmi les plans projetants. La figure 106 représente un procédé rationnel qui permet de mener les plans projetants par des droites de positions variées dans l'espace.

Considérons quelques exemples. Les figures 107 et 108 représentent respectivement l'intersection de la droite AB avec le plan du triangle CDE et le plan Q donné par ses traces.

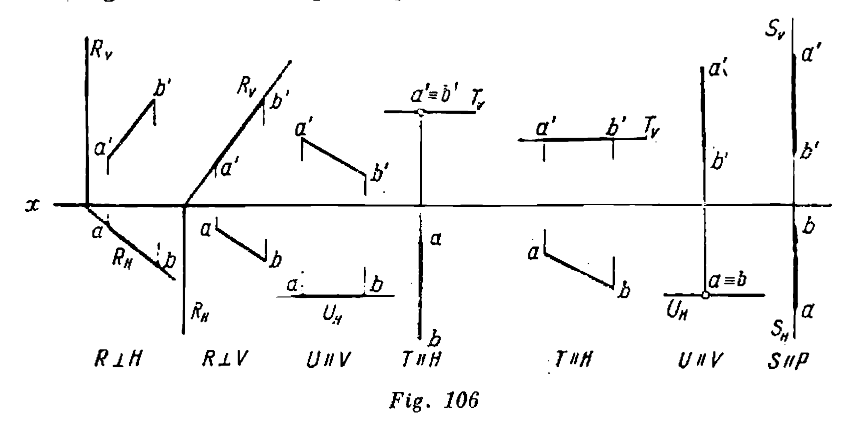


Fig. 106

Dans les deux cas, le point d'intersection K s'obtient à l'aide d'un plan projetant vertical R qui coupe les plans donnés suivant la droite MN. Les points M et N de la figure 107 sont les points

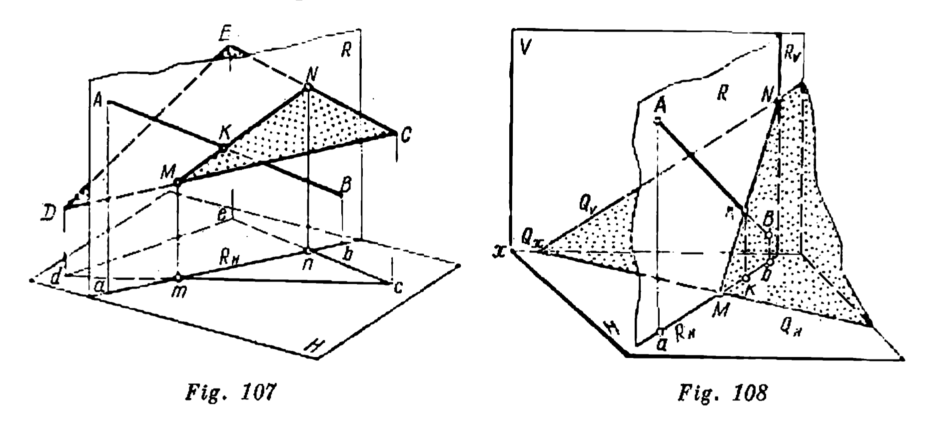


Fig. 107 *Fig. 108*

d'intersection des côtés du triangle CD et CE avec le plan R. Ces points étant situés dans le plan projetant vertical, leurs projections horizontales se trouvent sur l'intersection de cd et ce avec R_H. La droite MN de la figure 108 est déterminée par les points d'intersection des traces de même indice des plans Q et R.

Après avoir construit dans chacun des deux exemples la droite MN, on trouve le point de son intersection avec la droite donnée AB qui est précisément le point cherché K.

Pour résoudre les deux exemples sur une épure (fig. 109 et 110), on procède dans le même ordre. Lors de l'établissement des épures

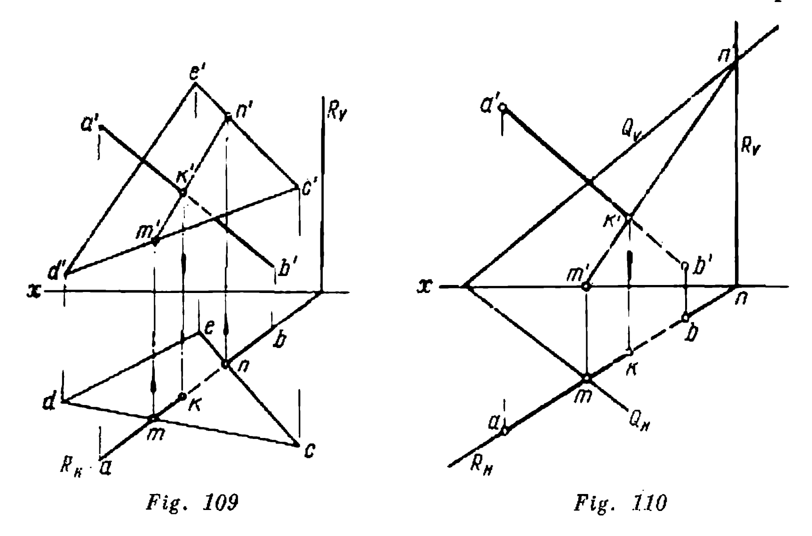


Fig. 109 *Fig. 110*

il faut prêter une attention particulière à la détermination des projections du point recherché, dernière étape du travail.

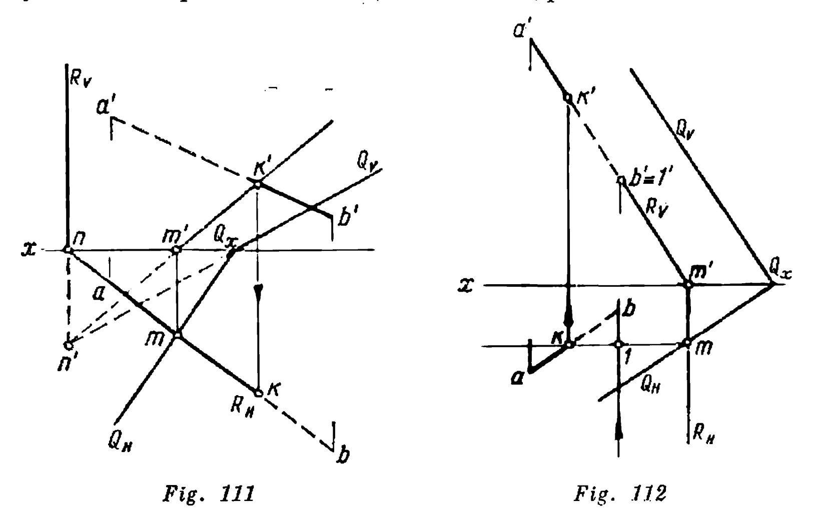


Fig. 111 *Fig. 112*

Il faut tenir compte de ce que dans le cas d'un plan projetant vertical choisi comme plan auxiliaire, la première des projections du point trouvé est la projection frontale (fig. 109, 110, 111). Si

l'on utilise un plan projetant de bout, on trouve d'abord la projection horizontale k, puis k' (fig. 112). La résolution du problème sur une épure doit s'achever par la détermination des segments visibles des projections de la droite donnée. La visibilité des projections de la droite AB par rapport au plan du triangle CDE (voir fig. 109) s'établit à l'aide des rayons visuels menés en pensée par les points d'intersection des projections de la droite considérée et des côtés du triangle, comme cela a été exposé au § 12 traitant de la position relative de deux droites.

La partie visible de la projection d'une droite située dans le premier octant par rapport au plan donné par ses traces est toujours

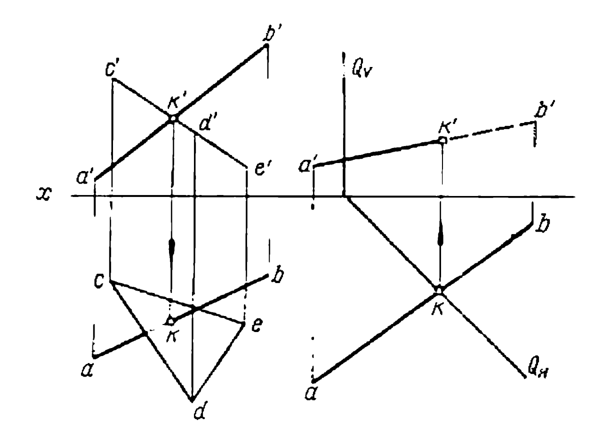


Fig. 113

celle qui coupe la trace du plan. La partie visible de la droite est séparée de la partie invisible par le point K (on admet que le point K appartient également au premier octant).

L'exemple de la figure 112 montre comment on détermine la visibilité d'une droite lorsque ses projections sont parallèles aux traces de même indice du plan. Dans ce cas, pour déterminer la partie visible de la projection frontale de la droite, on prend sur cette droite un point quelconque à droite ou à gauche de k', b' par exemple, et on mène par ce point un rayon visuel perpendiculaire au plan V. Toujours à l'aide du plan projetant de bout R qui passe à la fois par la droite AB et par le rayon visuel, on trouve le point I d'intersection de ce rayon avec le plan Q. La position des projections horizontales montre que le point B est plus éloigné de l'observateur que le point I, et donc le point B est caché par le plan Q.

Pour déterminer la partie visible de la projection horizontale de la droite on recourt à une construction analogue, mais le rayon visuel est pris alors perpendiculaire au plan H.

La figure 113 donne des exemples d'intersection d'une droite avec un plan projetant. Les points recherchés étant contenus dans les plans projetants, une des projections de chacun d'eux doit se situer sur la trace correspondante. Ainsi, dans le premier exemple, k' est déterminé par l'intersection des projections frontales de la droite et du triangle CDE, dans le deuxième, la projection horizontale k du point K est donnée par l'intersection de ab avec Q_H.

§ 24. Droite perpendiculaire à un plan

Démontrons le théorème suivant.

Si une droite est perpendiculaire au plan, les projections de cette droite sont perpendiculaires aux traces de même indice de ce plan (ainsi qu'aux projections respectives des horizontales et des frontales).

Soit une droite AB (fig. 114) perpendiculaire au plan Q. Elle coupe Q en B. Menons par le point B dans le plan Q l'horizontale BN.

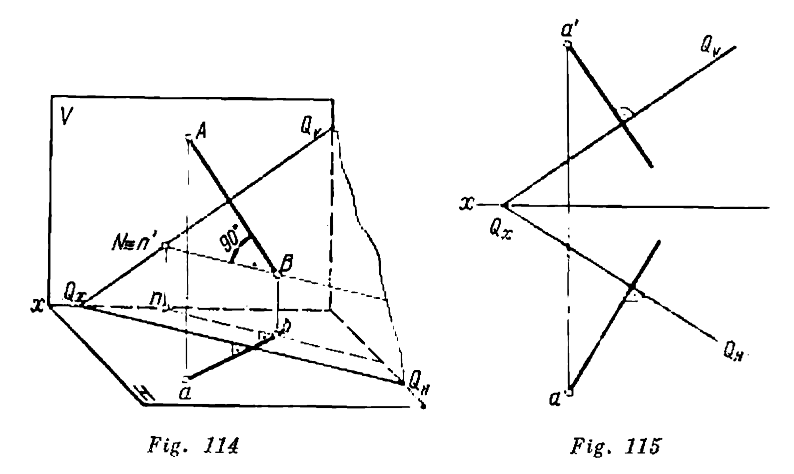


Fig. 114 *Fig. 115*

Alors, par définition, $AB \perp BN$, et d'après le théorème sur la projection d'un angle droit on a $ab \perp bn$. Puisque $Q_H \parallel bn$, on a $ab \perp Q_H$. D'une manière analogue, après avoir mené dans le plan Q une frontale par le point B on prouve que $a'b'$ est perpendiculaire à la projection frontale de la frontale et à la trace Q_V.

La réciproque se vérifie également, c'est-à-dire *si les projections d'une droite sont perpendiculaires aux traces de même indice d'un plan,*

cette droite est perpendiculaire au plan. En effet, si la trace horizontale du plan Q_H est perpendiculaire à la projection de la droite, elle est perpendiculaire également à la droite elle-même. Le même théorème des trois perpendiculaires permet de dire que Q_V est également perpendiculaire à cette droite. La droite, perpendiculaire aux deux droites Q_H et Q_V situées dans le plan Q, est donc perpendiculaire au plan donné.

La figure 115 montre la construction des projections d'une perpendiculaire abaissée du point donné A sur le plan Q. Le même problème est résolu sur la figure 116 pour le plan déterminé par le triangle BCD. La direction des projections de la perpendiculaire est

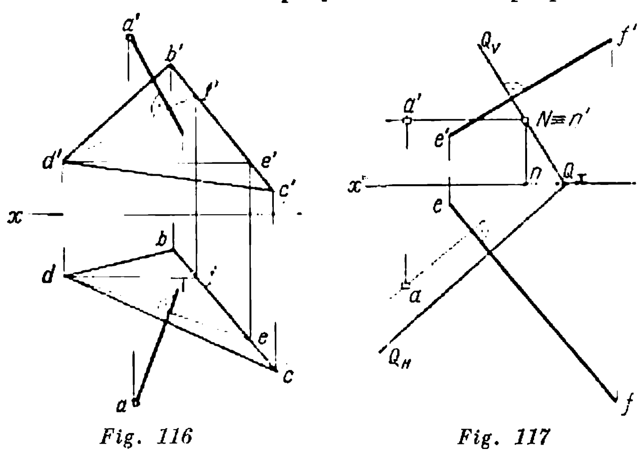


Fig. 116 *Fig. 117*

déterminée ici par les droites remarquables DE et DF du plan du triangle. Ainsi, la projection horizontale de la perpendiculaire est menée sous un angle droit à la projection de même nom de l'horizontale DE, la deuxième projection de la perpendiculaire forme un angle droit avec la projection frontale de la frontale DF.

Il arrive souvent qu'il faut résoudre le problème inverse, à savoir : construire un plan Q mené par un point donné A perpendiculairement à une droite donnée EF (fig. 117).

Les traces du plan cherché Q doivent être perpendiculaires aux projections de même indice de la droite EF. Puisque la direction des traces est connue, on connaît également la direction des droites remarquables de ce plan. On mène d'abord l'une de ces droites, l'horizontale AN, par le point A. La projection horizontale de l'horizontale an passe par a perpendiculairement à ef. On trouve ensuite sa trace frontale N par laquelle on mène Q_V perpendiculairement à $e'f'$. La trace Q_H est menée sous un angle droit à ef par le point de rencontre Q_x.

§ 25. Plans perpendiculaires

On sait de la géométrie dans l'espace que *deux plans sont perpendiculaires si l'un d'eux passe par une perpendiculaire à l'autre.* Par le point donné A on peut mener un nombre infini de plans perpendiculaires au plan donné Q. Ces plans forment dans l'espace un faisceau de plans dont l'axe est la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan Q.

L'épure de la figure 118 donne la construction des traces de l'un des plans de ce faisceau. D'abord on mène les projections de la

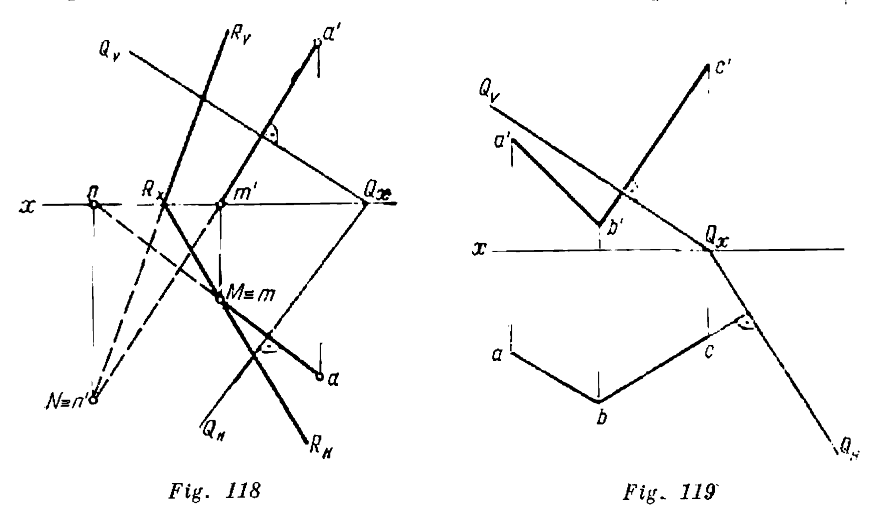


Fig. 118 *Fig. 119*

perpendiculaire au plan Q par les projections du point A sous un angle droit aux traces de même indice du plan. On trouve ensuite les traces M et N de cette perpendiculaire. On fait passer R_H par la trace horizontale M dans une direction arbitraire. La deuxième trace du plan est alors déterminée par les points N et R_x.

Posons maintenant un autre problème, à savoir: mener par la droite donnée AB un plan perpendiculaire au plan Q donné (fig. 119).

Si la droite AB n'est pas perpendiculaire au plan Q, par une telle droite on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire au plan donné. Sur la figure 119 ce plan est complètement déterminé par deux droites concourantes, la droite donnée AB et la perpendiculaire BC abaissée d'un point quelconque de AB sur le plan Q.

Les propriétés de deux plans perpendiculaires permettent de déduire, sans déterminer le dièdre qu'ils composent, si les plans sont perpendiculaires entre eux.

Soient deux plans Q et R (fig. 120). On cherche à établir s'ils sont perpendiculaires ou non. A cet effet on prend sur l'un d'eux (sur le plan R) un point quelconque A par lequel on mène une droite AB perpendiculaire à l'autre plan Q (dite normale). Il

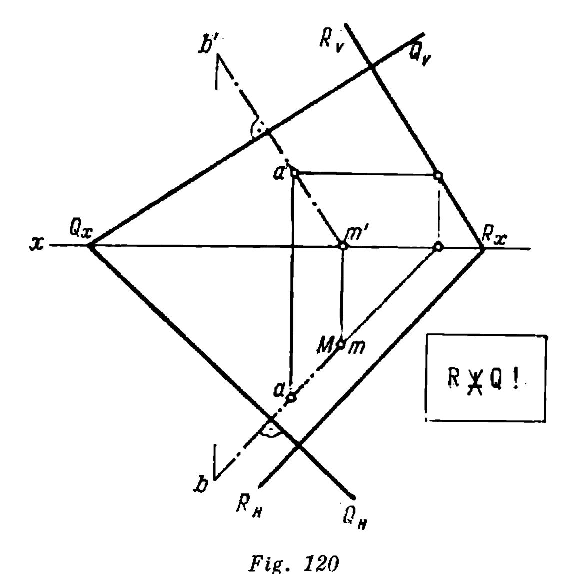


Fig. 120

faut maintenant définir la position relative de AB et du plan R. Si la droite AB est contenue dans le plan R, alors $R \perp Q$; s'il n'en est pas ainsi, les plans donnés ne sont pas perpendiculaires. La trace horizontale M de la droite AB, trouvée sur la figure 120, est en dehors de R_H; on en déduit que AB n'est pas contenue non plus dans le plan R.

Les plans Q et R ne sont donc pas perpendiculaires.

MÉTHODES DE TRANSFORMATION DES PROJECTIONS

§ 26. Caractéristique des méthodes

Si l'on ne soumet pas les projections considérées à certaines transformations spéciales la solution des problèmes métriques liés à la détermination des vraies grandeurs des figures et des corps représentés sur une épure peut donner lieu à des difficultés notables.

En géométrie descriptive, la complexité de la recherche des solutions et de l'analyse des problèmes graphiques est déterminée

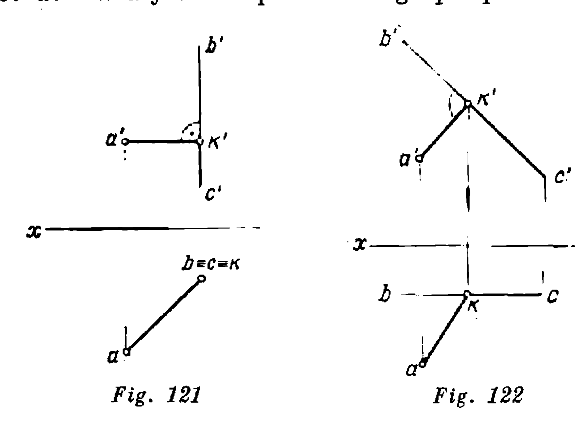


Fig. 121 *Fig. 122*

surtout par la position initiale des éléments géométriques par rapport aux plans de projection. Pour chaque problème il existe une disposition des éléments géométriques qui rend immédiate la solution de ce problème sur l'épure sans imposer des constructions supplémentaires.

Montrons combien la solution d'un problème peut être plus compliquée si l'on s'en tient aux projections données.

Les figures 121, 122 et 123 représentent les projections d'un point A et d'une droite BC. Dans le premier cas $BC \perp H$, dans le deuxième, BC est une frontale et dans le troisième, c'est une droite quelconque.

Soit à trouver la distance entre le point A et la droite BC. Le segment cherché AK doit être perpendiculaire à la droite BC, et, dans les deux premiers cas, BC étant parallèle au plan V, l'angle droit entre AK et BC se projette sur ce plan en vraie grandeur. Puisque dans le premier cas $BC \perp H$, le segment AK perpendiculaire à BC est parallèle à H et sa projection horizontale détermine la distance cherchée.

Sur les figures 122 et 123 il n'est possible de construire que les projections du segment cherché. Dans le dernier cas, cette construc-

tion est plutôt compliquée. En effet, il faut mener par le point A le plan Q perpendiculaire à BC, puis déterminer le point d'intersection de la droite BC avec le plan construit Q. La confrontation des figures considérées montre que les difficultés que présente la solution d'un même problème dépendent pour beaucoup des projections données. Or, ces dernières sont déterminées en définitive par la position relative de l'élément géométrique (point, droite, figure, corps) et des plans de projection H et V.

Donc, pour passer des deux derniers cas (voir fig. 122 et 123) au premier (position la plus commode) (voir fig. 121), il faut, tout en respectant la position relative du point et de la droite donnée, modifier leur position par rapport aux plans de projection. A cet effet on recourt à l'unede de ux méthodes de transformation des projections, à la rotation, ou bien au changement de plans de projection.

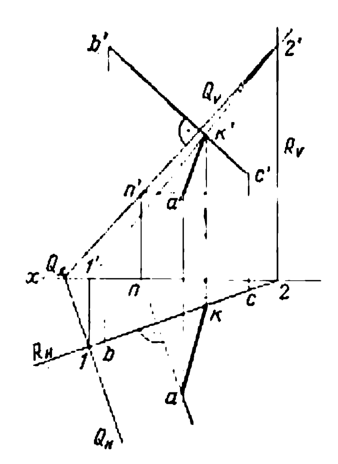


Fig. 123

La rotation consiste à modifier la position de l'élément géométrique donné par rapport aux plans de projection fixes par sa rotation autour d'un certain axe.

A l'inverse de la méthode de rotation, dans le cas du changement de plans de projection, l'élément géométrique reste fixe, alors que les plans de projection sont déplacés de façon à obtenir sur ces plans nouveaux des projections susceptibles d'assurer une solution rationnelle du problème considéré ; de plus, chaque nouveau système de plans de projection doit être un système orthogonal.

Le domaine d'application des transformations de projections n'est pas limité uniquement aux problèmes métriques. Nous donnerons également dans ce qui suit des exemples d'utilisation de ces méthodes pour la solution de problèmes dits de position, c'est-à-dire de problèmes relatifs à la construction des éléments communs de droites, de plans et de corps géométriques variés.

§ 27. Changement de plans de projection

La transformation des projections d'un certain corps par changement de plans de projection consiste à transformer les projections des points qui appartiennent au corps donné. Considérons donc avant tout les modifications que subissent les projections d'un point isolé

lors du passage d'un système de plans de projection orthogonaux à un autre. La figure 124 représente un point A donné dans un système de plans de projection V/H. Remplaçons l'un d'eux, V par exemple, par un autre plan, également vertical V_1, et construisons une

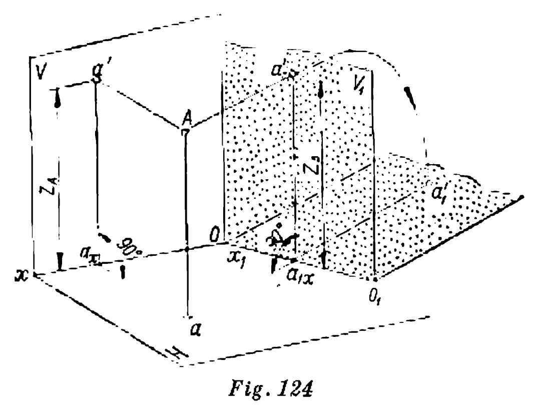


Fig. 124

nouvelle projection frontale du point sur ce plan. Le plan de projection horizontal H étant le même pour les systèmes « ancien » et « nouveau », la cote z du point A reste invariable. Donc, la distance entre la nouvelle projection frontale et la nouvelle ligne de terre O_1x_1 est égale à la distance entre la projection frontale ancienne et Ox, c'est-à-dire que $a'_1a_{1x} = a'a_x$. Dans ces conditions le point a'_1 est déterminé comme pied de la perpendiculaire abaissée de A sur V_1. Pour ce qui est de la projection horizontale a, elle ne change pas, alors que l'éloignement y du point A n'est plus le même. Cet éloignement est défini par la distance entre le point A et le plan V_1, qui sur l'épure est égale à la distance entre la projection a et la nouvelle ligne de terre O_1x_1. Or, dans l'exemple considéré, cette dernière est tracée arbitrairement.

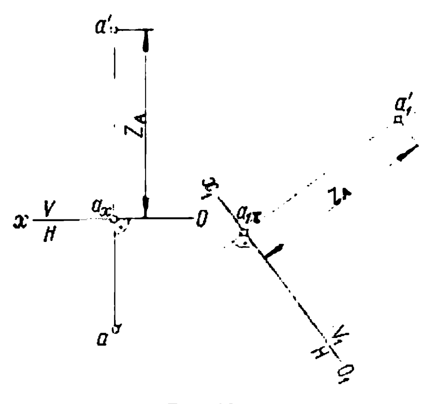


Fig. 125

Pour obtenir l'épure, le plan V_1 est confondu avec H par rotation autour de O_1x_1. La nouvelle projection frontale a'_1 du point A se confond également avec H, le point A se trouvant sur la perpendiculaire commune à la nouvelle ligne de terre O_1x_1 et à la projection horizontale a restée inchangée (fig. 125).

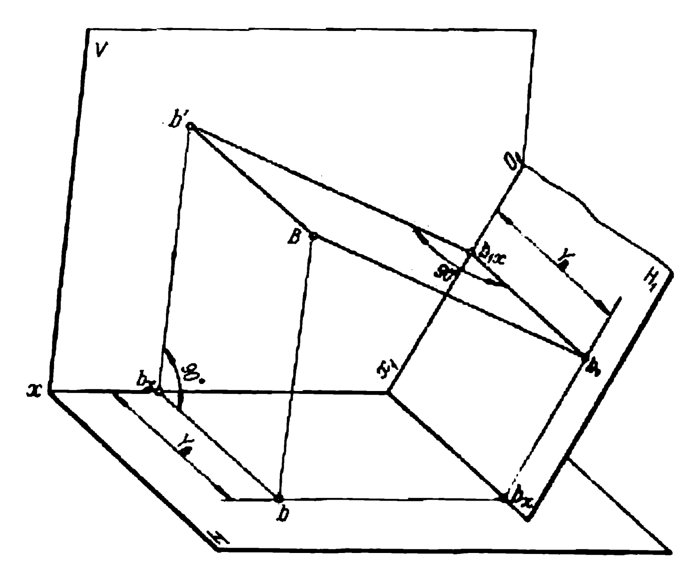


Fig. 126

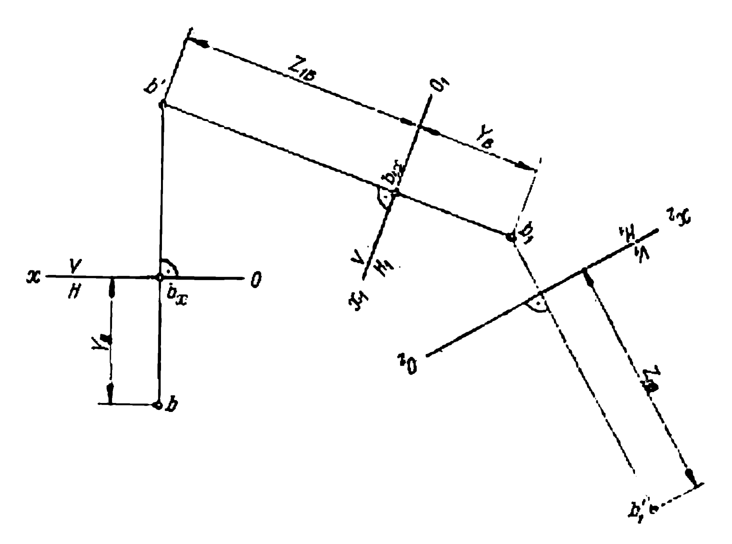


Fig. 127

D'une manière analogue on peut remplacer le plan de projection horizontal H par le plan H_1 également perpendiculaire à V (fig. 126). Cette fois c'est la valeur de l'éloignement y qui ne change pas et qui détermine la distance entre le point B et le plan V commun aux deux systèmes. Aussi la distance entre la nouvelle projection « horizontale » du point et la ligne de terre O_1x_1 est-elle égale à la distance entre le point b et Ox, c'est-à-dire $b_1b_{1x} = bb_x$.

Lors de la construction d'une projection nouvelle sur une épure (fig. 127), on abaisse du point b' une perpendiculaire sur la nouvelle ligne de terre O_1x_1 sur laquelle on porte à partir du point b_{1x} le segment $b_{1x}b_1$ égal à l'éloignement y_B.

Certaines transformations des projections imposent un double changement des plans. Le passage successif d'un système de plans de projection à un autre s'effectue compte tenu de la règle suivante. *La distance entre la nouvelle projection du point et la nouvelle ligne de terre doit être égale à la distance entre la projection transformée du point et l'ancienne ligne de terre.*

Sur la figure 127, lors du premier changement Ox était l'ancienne ligne de terre pour O_1x_1, et c'est pourquoi $b_1b_{1x} = bb_x$, alors que lors du passage du système V/H_1 au système V_1/H_1, O_1x_1 est l'ancienne ligne de terre par rapport à O_2x_2. Il reste à ajouter à tout ce qui vient d'être dit que dans toutes les constructions sur l'épure les projections d'indices différents des points doivent se situer sur les mêmes perpendiculaires aux axes correspondants.

§ 28. Solution de quatre problèmes fondamentaux par la méthode des changements de plans de projection

Tous les problèmes métriques ou de position dont la solution est donnée par la méthode des changements de plans de projection peuvent être ramenés à l'un des quatre problèmes suivants.

Problème 1. *Dans le nouveau système, rendre une droite parallèle à un plan de projection.*

La figure 128 représente une droite AB qui dans le système V/H est une droite quelconque.

Pour résoudre le problème, on prend un nouveau plan V_1 tel que $V_1 \perp H$ et $V_1 \parallel AB$. Dans le système V_1/H la droite AB devient une frontale, et donc $O_1x_1 \parallel ab$. Le segment AB et l'angle α se projettent sur le plan V_1 en vraie grandeur. La solution de ce problème sur l'épure est donnée par la figure 129 où ab est mené parallèle à O_1x_1 et où l'on a construit suivant la règle énoncée précédemment une nouvelle projection frontale $a'_1b'_1$. Pour résoudre ce même problème, on peut remplacer le plan de projection horizontal H par H_1 (fig. 130). Le nouveau plan H_1 est perpendiculaire à V et parallèle à AB, et la nouvelle ligne de terre $O_1x_1 \parallel a'b'$. Il est clair

que $a_1b_1 = AB$ et l'angle β formé par la projection a_1b_1 avec l'axe O_1x_1 est égal à la pente de la droite AB par rapport au plan V. Si-

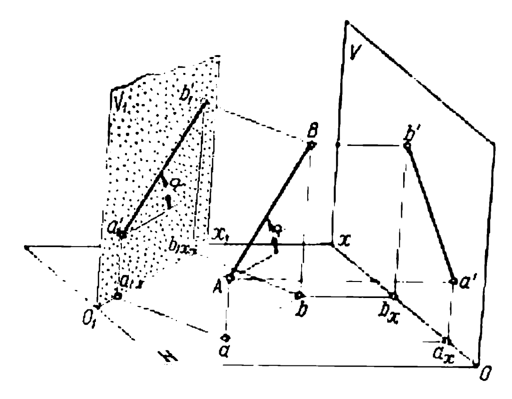


Fig. 128

gnalons une particularité de l'exemple considéré. Puisque les projections changées des extrémités du segment (horizontales dans notre

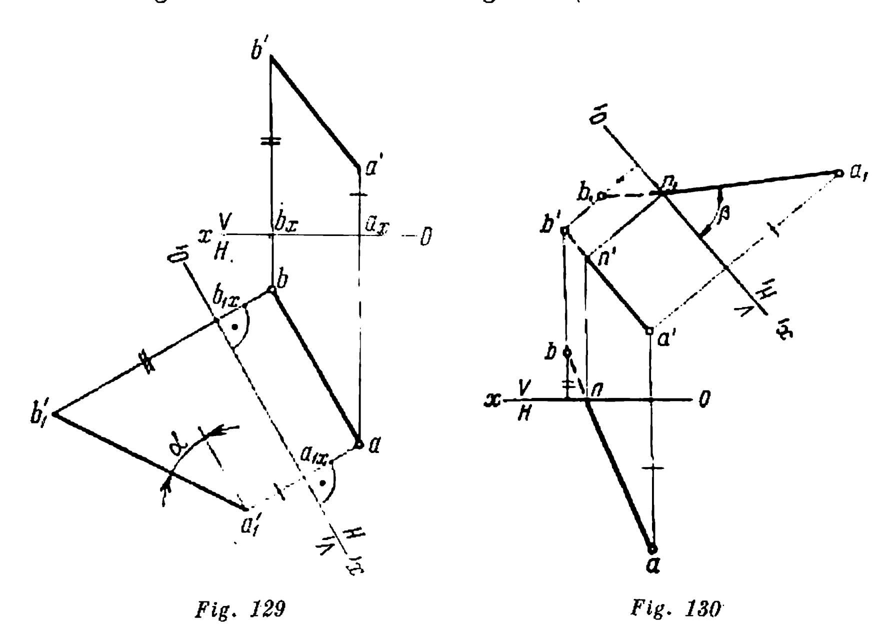


Fig. 129 *Fig. 130*

cas) se trouvent des deux côtés de Ox, les nouvelles projections de ces points a_1 et b_1 doivent se trouver également des deux côtés de la

nouvelle ligne de terre O_1x_1. Il en est ainsi parce que $y_A > 0$ et $y_B < 0$.

Problème 2. *Dans le nouveau système, rendre une droite perpendiculaire à un plan de projection.* En d'autres termes, dans le nouveau système la droite AB (fig. 131) doit devenir projetante.

La transformation des projections d'une droite AB impose ici un double changement de plans, car dans le système V/H le plan

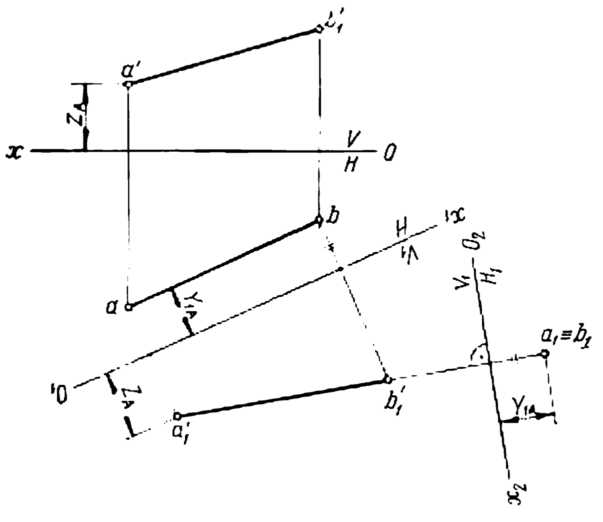


Fig. 131

perpendiculaire à AB n'est orthogonal ni par rapport à V ni par rapport à H.

Lors du passage du système V/H au système V_1/H, le plan V_1 est pris perpendiculaire à H et parallèle à la droite AB, c'est-à-dire qu'on revient à la solution du premier problème.

Lors du deuxième changement, le nouveau plan H_1 est pris perpendiculaire à la droite AB. On rend ainsi orthogonal le système V_1/H_1. La ligne de terre O_2x_2 est menée perpendiculaire à $a'_1b'_1$.

Sur le plan H_1 la droite AB se présente comme un point. Ainsi dans le système V_1/H_1, la droite AB devient projetante par rapport au plan H_1.

Problème 3. *Dans le nouveau système, rendre un plan perpendiculaire à un plan de projection.*

Soit un plan quelconque déterminé par trois points A, B et C (fig. 132). Le problème se résout en prenant le nouveau plan de projection perpendiculaire au plan du triangle ABC et à l'un des plans de projection. Le nouveau plan doit donc être perpendiculaire

à la ligne d'intersection du plan donné avec l'un des plans de projection. Il n'est pas nécessaire dans ces conditions de construire les traces du plan du triangle, car leur direction peut être établie à l'aide des droites remarquables.

On mène donc d'abord une des droites remarquables dans le plan donné, l'horizontale AD par exemple. Cette horizontale détermine l'orientation du nouveau plan de projection V_1.

En prenant $V_1 \perp AD$ on satisfait aux deux conditions, le nouveau plan V_1 étant perpendiculaire à la fois à H et au plan du triangle. La nouvelle ligne de terre O_1x_1 qui doit être perpendiculaire à la trace horizontale du triangle non représentée est menée sous un angle droit à ad. En traçant par les projections horizontales des sommets du triangle des droites perpendiculaires à la nouvelle ligne de terre, on porte sur ces droites à partir de O_1x_1 des segments égaux à z_A, z_B et z_C. On obtient ainsi une nouvelle projection frontale du triangle $a_1'b_1'c_1'$ qui est une droite. Notons que l'angle α formé par le triangle et le plan H se projette en vraie grandeur sur le plan V_1 perpendiculaire au triangle et à H.

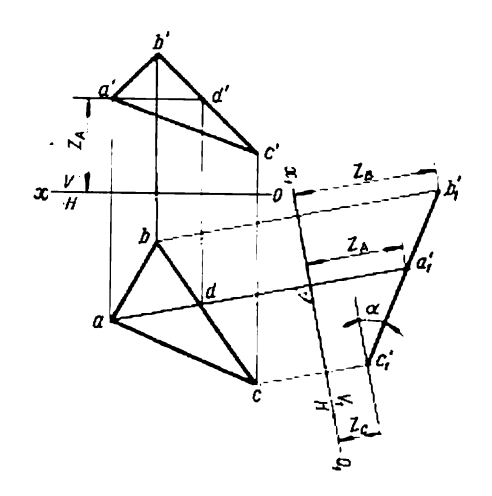


Fig. 132

Une transformation analogue de l'épure est réalisée sur la figure 133 où le plan H est remplacé par le plan H_1 perpendiculaire à V et au triangle ABC. A cet effet, dans le plan du triangle on mène une frontale AF et on prend le plan H_1 perpendiculaire à celle-ci. La nouvelle ligne de terre O_1x_1 est choisie perpendiculaire à $a'f'$. Le plan du triangle devient plan projetant par rapport à H_1. L'angle d'inclinaison du triangle par rapport au plan frontal de projection V se projette sur le plan H_1 en vraie grandeur.

Soit maintenant le plan Q déterminé par ses traces (fig. 134). Sur une épure, un plan projetant est caractérisé par le fait que l'une de ses traces est perpendiculaire à la ligne de terre. C'est pourquoi lorsqu'on se propose de transformer le plan Q en un plan projetant de bout, la nouvelle ligne de terre O_1x_1 doit être menée sous un angle droit à Q_H (sur la figure 134, $O_1x_1 \perp Q_H$). Dans le nouveau système de plans de projection V_1/H la position de la trace Q_H reste inchangée.

Il reste à répondre à la question : comment déterminer la nouvelle trace Q_{V1}. Sur la figure 134, la nouvelle position de la trace fron-

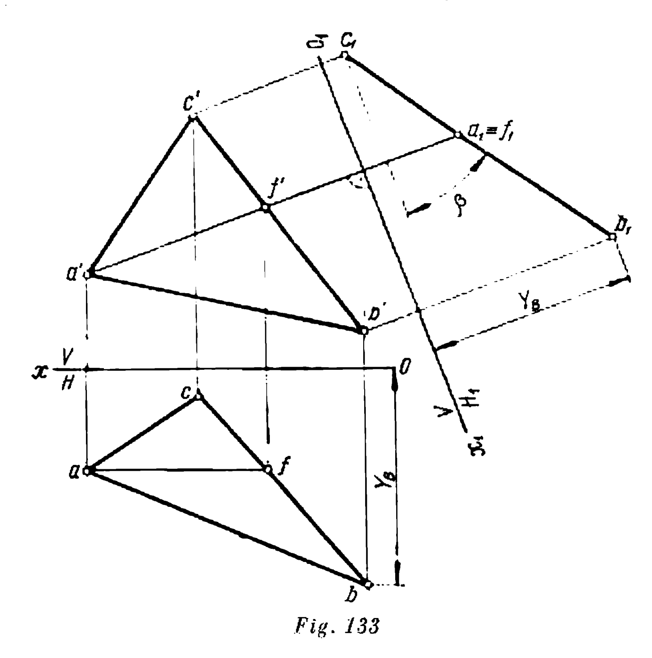


Fig. 133

tale a été trouvée à l'aide de deux points : le nouveau point de rencontre des traces Q_{x1} et la nouvelle projection frontale n'_1 d'un point N appartenant au plan Q. La trace Q_{V1} doit passer par n'_1, car les projections frontales de tous les points situés dans les plans projetants de bout se confondent avec la trace de même indice. Sur la figure 135 où le plan H est remplacé par H_1 ($O_1x_1 \perp Q_V$), la trace Q_{H1} est déterminée par les points Q_{x1} et m_1, le deuxième point étant la nouvelle projection «horizontale» du point M dans le système V/H_1.

Fig. 134

Chacun des changements effectués permet de déterminer les pentes α et β du plan Q respectivement par rapport aux plans de projection H (fig. 134) et V (fig. 135).

Problème 4. *Dans le nouveau système, rendre un plan quelconque parallèle à un plan de projection.*

Soit dans un plan quelconque un triangle ABC (fig. 136). Trouver un nouveau système orthogonal de plans de projection tel que

l'un d'eux soit parallèle au triangle donné. Un tel plan est impossible à construire dans le système V/H. En effet, un plan parallèle

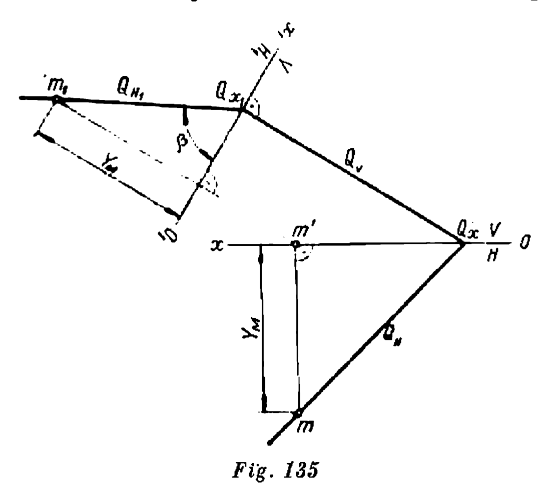


Fig. 135

au triangle n'est perpendiculaire ni à H ni à V, c'est-à-dire il ne forme pas de système orthogonal avec les plans de projection donnés.

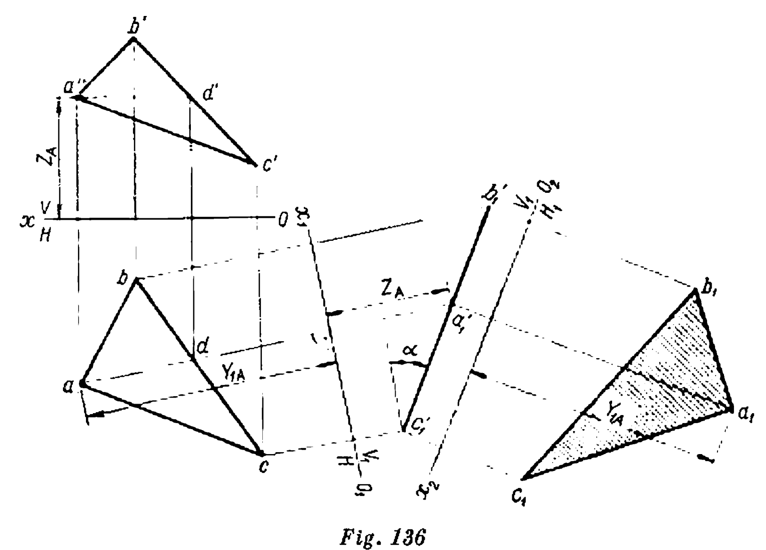


Fig. 136

Le problème nécessite pour sa résolution un double changement de plans de projection. Le premier changement de V pour V_1 consiste

à transformer le plan du triangle en plan projetant. Cette opération a été décrite dans ce qui précède (voir la solution du problème fondamental 3).

La deuxième étape dans la résolution du problème consiste à passer du système V_1/H au système V_1/H_1. Le nouveau plan H_1 est mené parallèle au triangle, et donc la nouvelle ligne de terre O_2x_2 est tracée sur l'épure parallèle à la droite qui porte les points a_1', b_1' et c_1'. Suivant l'usage, on fait passer par ces points des perpendiculaires à la nouvelle ligne de terre et on porte sur ces perpendiculaires à partir de O_2x_2 des segments égaux à y_{1A}, y_{1B}, y_{1C} (la fig. 136 indique seulement le premier d'entre eux). La projection $a_1b_1c_1$ ainsi obtenue détermine la vraie grandeur du triangle.

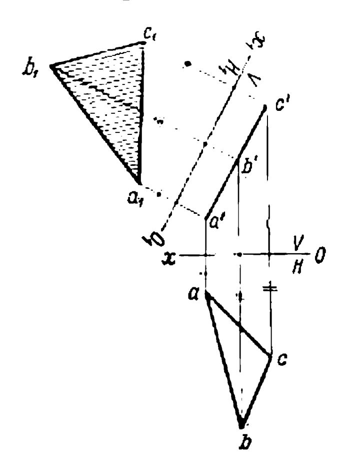


Fig. 137

Lorsque le plan donné est un plan projetant (fig. 137), le problème se résout par un seul changement de plans. Dans ce cas, le plan H_1 parallèle au triangle ABC forme avec V un système orthogonal V/H_1. La nouvelle projection $a_1b_1c_1$ sur le plan H_1 détermine la vraie grandeur du triangle.

29. Méthode de la rotation

1. Rotation d'un point. Un point A qui tourne autour d'un axe II_1 décrit un cercle dont le plan Q est perpendiculaire à II_1 (fig. 138). Le centre du cercle Ω est situé au point d'intersection de l'axe de rotation II_1 avec le plan Q (dans lequel tourne le point), et la grandeur du rayon R est définie par la distance entre le point A et l'axe de rotation. Si le plan de projection est parallèle à l'axe II_1, la projection du point en rotation sur ce plan est une droite perpendiculaire à la projection de l'axe II_1 sur ce même plan.

Considérons d'abord la rotation d'un point autour des axes perpendiculaires aux plans de projection.

La figure 139 donne une image immédiate du point A en rotation autour de l'axe $II_1 \perp H$. Dans ce cas le point se déplace suivant la circonférence dans un plan parallèle à H. Cette circonférence se projette sur le plan H en vraie grandeur, et sur le plan V sous forme d'un segment de droite parallèle à la ligne de terre (fig. 140).

Inversement, lorsque l'axe de rotation est perpendiculaire au plan V (fig. 141), la projection horizontale du point se déplace suivant une droite parallèle à l'axe Ox, et la projection frontale, suivant une circonférence. Sur les figures 140 et 141, A_1 désigne la

nouvelle position qu'occupe le point A après sa rotation d'un angle φ.

L'exemple suivant est consacré à l'examen de la rotation d'un point autour d'un axe parallèle au plan H et non perpendiculaire

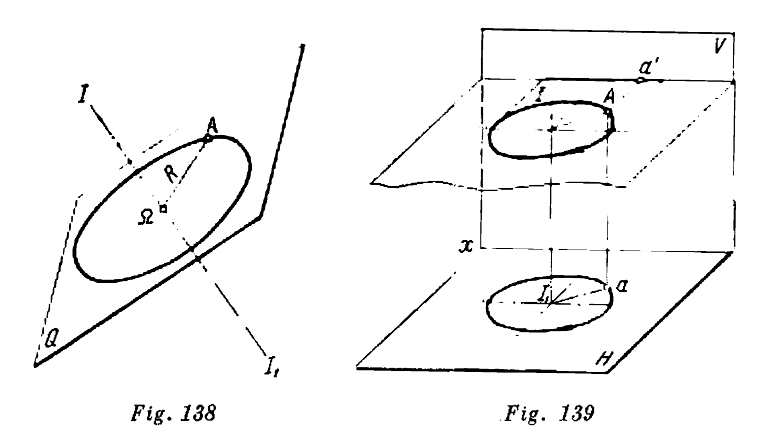


Fig. 138 *Fig. 139*

à V ou à P (fig. 142). La projection horizontale a du point A se déplace également dans ce cas suivant une droite perpendiculaire à la projection ii_1 de l'axe de rotation.

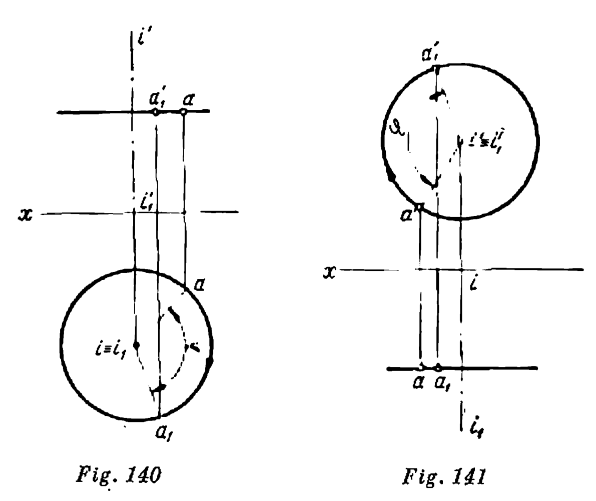


Fig. 140 *Fig. 141*

En effet, l'axe II_1 est parallèle à H et perpendiculaire au plan Q dans lequel tourne le point A. Par conséquent, les plans Q et H sont perpendiculaires.

La circonférence que décrit le point A, située dans le plan projetant vertical Q, se projette sur H sous forme d'une droite qui se confond avec la trace Q_H. La condition de perpendicularité entre une droite et un plan permet de déduire que $ii_1 \perp Q_H$.

Ainsi, lorsqu'un axe de rotation II_1 est parallèle à un plan Q, la projection d'un point qui tourne autour de cet axe sur le plan Q se déplace suivant une droite. Cette droite est perpendiculaire à la projection de l'axe de rotation sur le plan Q considéré.

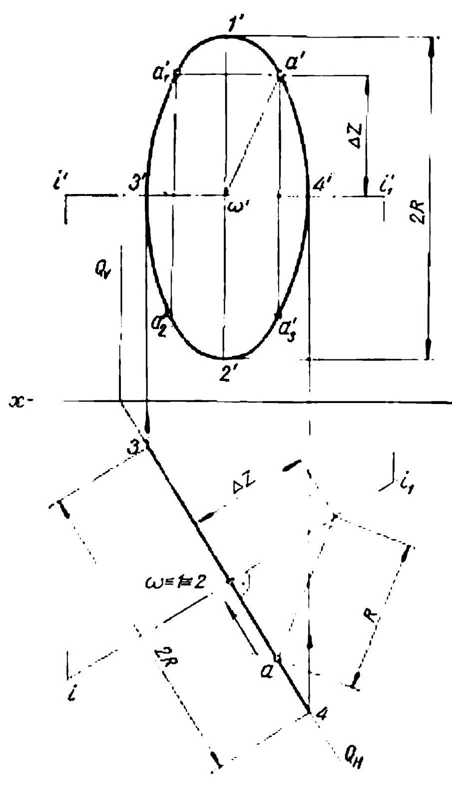


Fig. 142

Reprenons notre exemple. La projection frontale a' du point A décrit une ellipse.

Le grand axe de l'ellipse est égal à $2R$. La grandeur du rayon de rotation R du point A est déterminée par l'hypoténuse du triangle rectangle de côtés ωa et Δz. Le petit axe est construit à l'aide des points III et IV, extrémités du diamètre de circonférence parallèle au plan H qui se projette sur H en vraie grandeur. Quant aux points a'_1, a'_2 et a'_3, on utilise pour les construire les propriétés de la symétrie axiale et centrale de l'ellipse.

La rotation du point autour d'une frontale s'effectue d'une manière analogue.

2. Rotation d'un segment. Soient un segment AB et un axe de rotation II_1 perpendiculaire au plan H (fig. 143).

Pour construire les projections du segment quand il a tourné autour de II_1 d'un angle φ dans le sens des aiguilles d'une montre, il suffit de définir la nouvelle position de deux de ses points, A et B, par exemple. Lors de la construction de nouvelles projections horizontales on observait la condition d'égalité des angles au centre $\widehat{aia_1} = \widehat{bib_1}$.

Les projections frontales des points A et B se déplacent suivant les droites parallèles à l'axe Ox. Elles sont déterminées par l'inter-

section de ces droites avec les lignes de rappel menées par les points a_1 et b_1.

Les triangles aib et a_1ib_1, ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, sont égaux, leurs hauteurs sont donc égales ($ic = ic_1$). Cette égalité permet d'effectuer la rotation du segment AB de la façon suivante (fig. 144) :

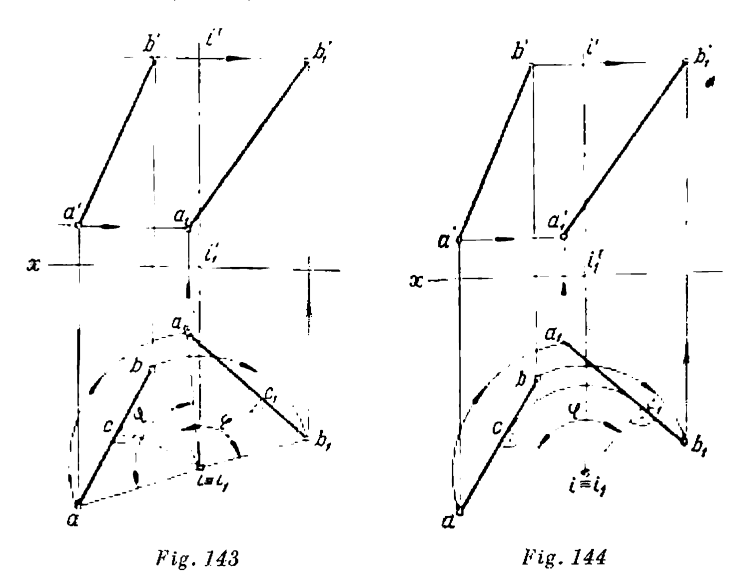


Fig. 143 *Fig. 144*

1) abaisser du point $i \equiv i_1$ qui est la projection horizontale de l'axe de rotation une perpendiculaire ic à ab ;

2) tourner cette perpendiculaire ic de l'angle φ dans la direction donnée en position ic_1 ;

3) mener par le point c_1 une perpendiculaire à ic_1 ;

4) obtenir les points a_1 et b_1 d'intersection de la droite ainsi construite avec les arcs de rayons ia et ib ;

5) construire les projections frontales a_1' et b_1' de même que dans l'opération précédente (voir texte relatif à la fig. 143).

3. Rotation d'un plan. Pour tourner le plan donné Q d'un angle φ, il suffit de tourner de cet angle deux points du plan. La nouvelle position du plan est déterminée par les points obtenus après rotation et le point fixe d'intersection du plan Q avec l'axe de rotation. Dans cette opération on suppose que les trois points ne sont pas alignés.

Si l'axe de rotation est parallèle au plan Q, il suffit, après avoir tourné deux points du plan Q, de mener par l'un d'eux une droite parallèle à l'axe de rotation. Il est clair que ces deux points du plan Q

ne doivent pas se trouver alors sur la droite parallèle à l'axe de rotation.

La nouvelle position du plan après rotation peut être définie non pas par deux points mais par une droite qui ne coupe pas l'axe de rotation et ne lui est pas parallèle.

Des exemples de rotation d'un plan autour de droites quelconques sont examinés dans ce qui suit.

§ 30. Solution des quatre problèmes fondamentaux par la méthode de la rotation

Problème 1. *Rendre une droite parallèle à un plan de projection.*

Si la droite est parallèle au plan V ou H, l'une de ses projections doit être parallèle à Ox. Par conséquent, pour rendre la droite AB

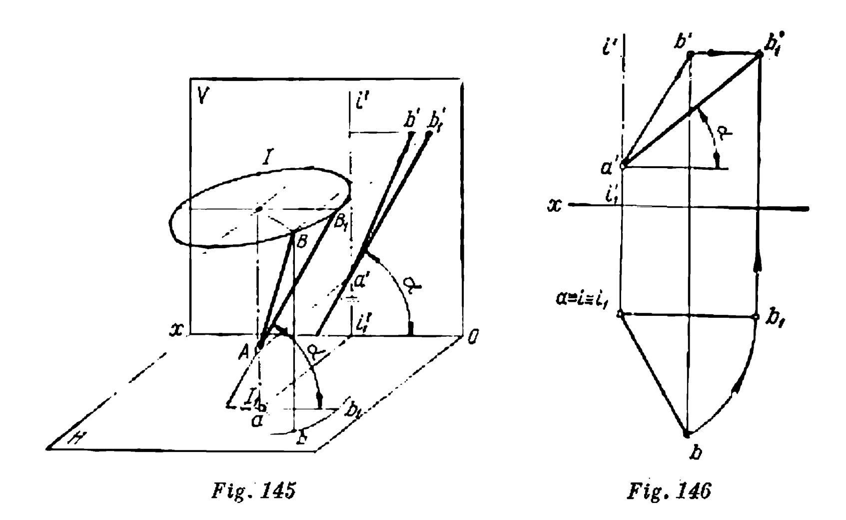


Fig. 145 *Fig. 146*

parallèle à V, il suffit de tourner sa projection horizontale de façon qu'elle devienne parallèle à l'axe Ox.

Pour effectuer cette rotation, il faut choisir un axe de rotation II_1 perpendiculaire au plan H. Sur les figures 145 et 146, l'axe II_1 est mené par le point A du segment considéré. Lors de la rotation du segment le point A reste fixe. Tout autre point quelconque B du segment décrit de même que sa projection horizontale un arc de circonférence. L'angle de rotation du point B est déterminé par la condition de parallélisme de la nouvelle projection ab_1 à Ox. Une telle rotation rend possible la projection en vraie grandeur sur le plan V du segment AB ainsi que de l'angle α formé par AB et le

plan H. En faisant tourner autour de l'axe perpendiculaire au plan V le segment AB on peut le rendre parallèle au plan H (fig. 147). Après la rotation du segment, sa projection frontale doit être parallèle à Ox. Le segment AB et l'angle β formé par ce segment et le plan V se projettent alors en vraie grandeur sur le plan H.

La rotation du segment AB autour de l'axe II_1 perpendiculaire au plan P et la détermination de l'angle γ que AB compose avec P sont montrées sur la figure 148.

Cette dernière transformation rend le segment AB parallèle au plan V.

Ainsi une droite quelconque peut être rendue parallèle à l'un des plans de projection par une rotation autour d'une projetante.

Fig. 147

Problème 2. *Rendre projetante une droite quelconque.*

On y parvient en effectuant une double rotation du segment AB autour de deux axes différents (fig. 149) [1].

La première rotation d'un angle φ_1 se fait autour de l'axe qui passe par le point A et qui est perpendiculaire à H. Le segment est

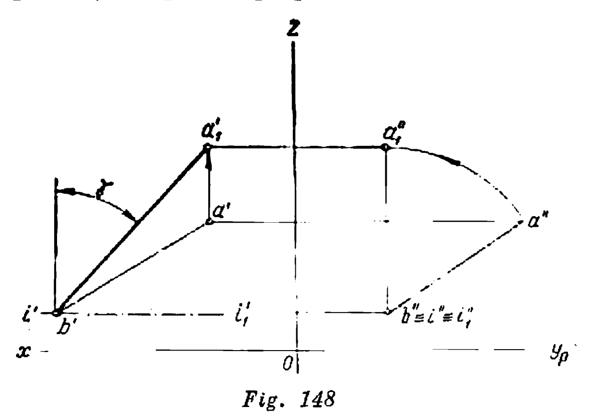


Fig. 148

amené en position parallèle au plan V. C'est la position à laquelle correspondent les projections ab_1 et $a'b'_1$. La deuxième rotation d'un

[1] Sur la figure 149, de même que sur la majorité des figures qui suivent, les axes de rotation des segments ne sont pas représentés. Mais il faut en tenir compte et avoir une idée bien nette de leur orientation par rapport aux plans de projection.

angle φ_2 s'effectue autour de l'axe perpendiculaire au plan V et passant également par le point A. La projection frontale du segment $a'b'_2$ devient en définitive perpendiculaire à Ox, sa projection horizontale se transforme en un point $a \equiv b_2$, et le segment lui-même devient perpendiculaire au plan H.

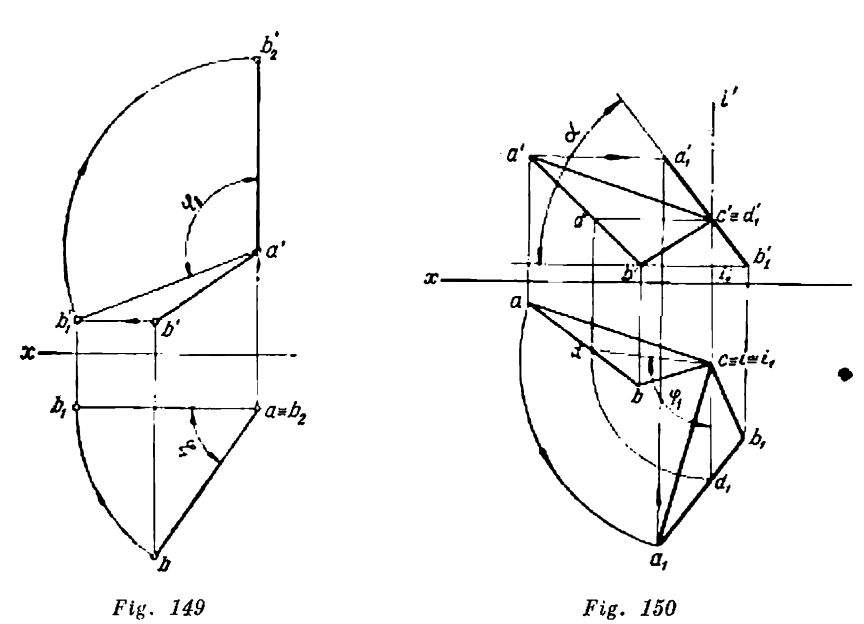


Fig. 149 *Fig. 150*

Problème 3. *Rendre projetant un plan quelconque.*

Considérons la transformation du plan du triangle ABC en plan projetant de bout (fig. 150).

On sait que sur l'épure la projection horizontale de l'horizontale d'un tel plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

C'est pourquoi on a tracé avant tout dans le plan du triangle ABC l'horizontale CD qui est amenée en position $CD_1 \perp V$ par la rotation d'un angle φ_1 autour de l'axe II_1.

La rotation d'une horizontale concourante à l'axe de rotation ne détermine pas une nouvelle position du plan du triangle. C'est pourquoi les sommets A et B sont soumis à leur tour à la rotation de même angle φ_1. La projection frontale du triangle se transforme en une droite. Elle forme avec l'axe Ox un angle α égal à l'angle entre le triangle ABC et le plan H.

Considérons le cas où le plan Q est donné par ses traces (fig. 151).

Le plan Q coupe l'axe de rotation perpendiculaire à H en K. C'est le point par lequel passe également le plan Q_1 tourné d'un

angle φ. La position de ce plan est déterminée par le point K et l'une des droites, la trace horizontale, par exemple. Sur la figure **151**, le plan Q est transformé par la rotation en un plan projetant de bout. Après la rotation, sa trace Q_{1H} devient perpendiculaire à l'axe Ox. Dans ces conditions la distance entre l'axe de rotation et la trace reste constante, c'est-à-dire $im = im_1$. On fait passer

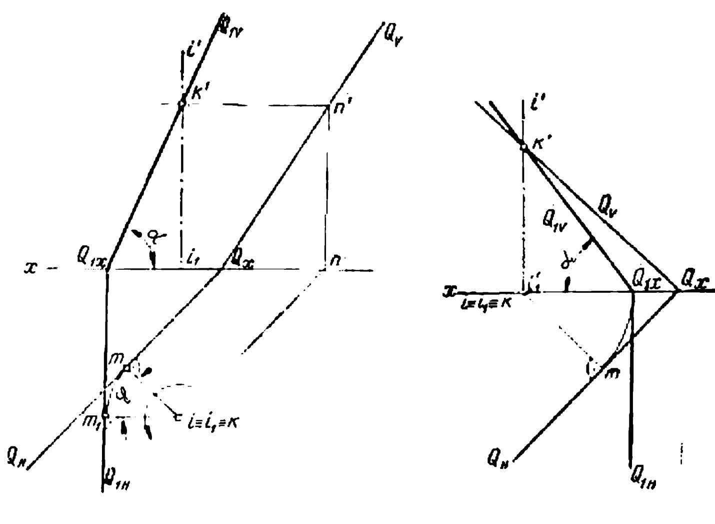


Fig. 151 *Fig. 152*

la trace frontale du plan par un nouveau point de rencontre Q_{1x} et k'. La transformation effectuée permet de déterminer la pente, du plan Q par rapport à H (angle α).

Sur l'épure, les constructions liées à sa transformation peuvent être simplifiées si on place l'axe de rotation sur le plan V. Cet axe coupe alors le plan Q en K et pour trouver ce point nul besoin n'est de faire appel à des constructions supplémentaires (fig. 152).

Problème 4. *Rendre un plan parallèle à un plan de projection.*

Considérons d'abord la solution du problème lorsque les axes de rotation sont des projetantes. La première rotation du triangle ABC s'effectue autour de l'axe vertical qui passe par le sommet C (fig. 153).

Il en résulte qu'un plan quelconque devient un plan projetant de bout, c'est-à-dire la première étape de la transformation correspond à la solution du problème 3. Ensuite on peut effectuer une deuxième rotation d'un angle φ_2 autour de l'axe qui passe par le sommet B_1 et qui est perpendiculaire au plan V. Les projections frontales de tous les sommets du triangle se déplacent suivant des

arcs concentriques menés du point b'_1 pris comme centre, alors que les projections horizontales, suivant des droites parallèles à l'axe Ox. Après la rotation d'un angle φ_2, le plan du triangle devient parallèle à H. La projection horizontale hachurée du triangle détermine donc sa forme en vraie grandeur.

Démontrons maintenant qu'on peut résoudre ce problème d'une manière plus simple par la rotation autour d'un seul axe.

Si l'on se propose de rendre par une seule rotation le triangle parallèle au plan H, il faut choisir comme axe de rotation une droite

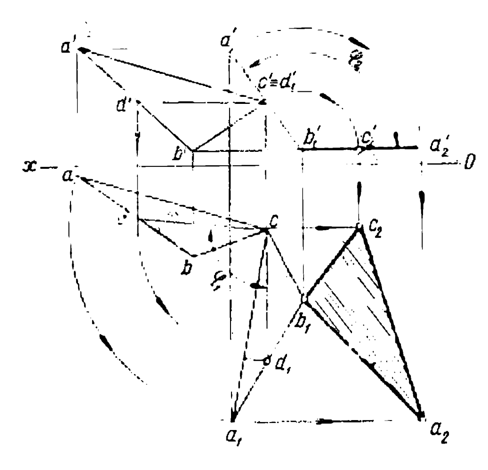


Fig. 153

située dans le plan du triangle qui soit parallèle à H avant la rotation; cette droite est une de ses horizontales. Sur la figure 154 la droite CD est une telle horizontale.

Sans reprendre toutes les explications données au numéro 1 du paragraphe précédent où nous avons examiné la rotation d'un point autour d'une horizontale, notons les éléments principaux dans la construction qui suit: lorsque le plan du triangle est parallèle à H, les projections horizontales de chaque sommet en rotation se trouvent éloignées de l'axe de rotation à la distance égale au rayon de rotation du point donné.

Les constructions ultérieures s'effectuent dans l'ordre suivant.

1. Mener des droites perpendiculaires à cd suivant lesquelles se déplacent les projections horizontales des points en rotation.

2. Construire les projections du rayon de rotation de l'une d'elles, de A par exemple. Ce sont les segments ae et $a'e'$.

3. Déterminer d'après deux projections la vraie grandeur du rayon de rotation R_A.

Sur la figure 154, R_A est défini par l'hypoténuse $\bar{A}e$ du triangle rectangle $\bar{A}ae$. Notons que $\bar{A}a = z_E - z_A$.

4. Porter le segment R_A depuis le point e sur la droite suivant laquelle se déplace la projection horizontale du sommet A.

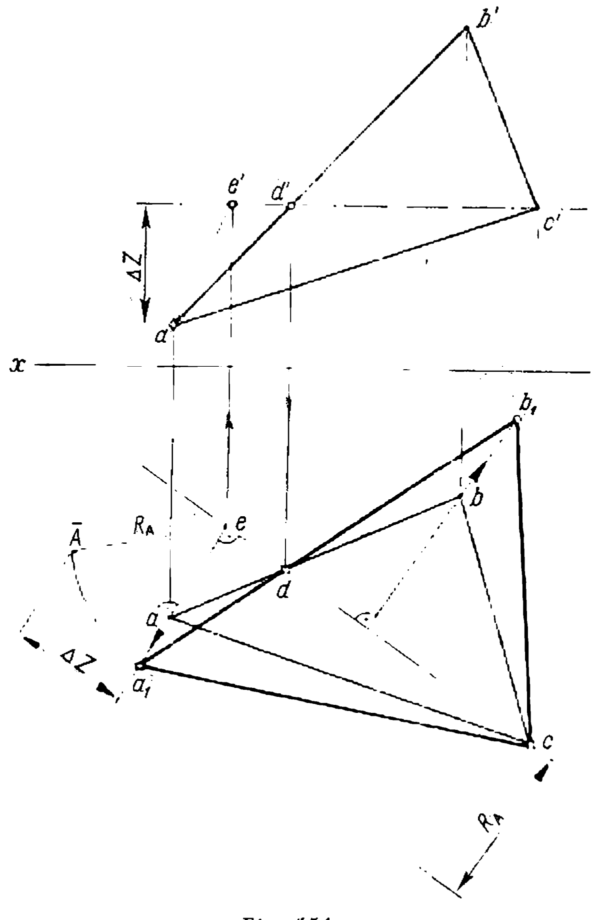


Fig. 154

5. Mener par le point obtenu a_1 et le point fixe d une droite jusqu'à son intersection avec la droite suivant laquelle se déplace la projection horizontale du sommet B.

6. Joindre les points a_1 et b_1 ainsi obtenus entre eux et au sommet fixe C et déterminer la nouvelle projection horizontale du triangle.

Cette projection donne la vraie grandeur du triangle ABC.

La projection frontale du triangle se transforme en une droite qui se confond avec $c'd'$.

§ 31. Méthode du rabattement

On appelle rabattement le cas particulier de la méthode de la rotation où l'axe de rotation (dit charnière du rabattement) est l'une des traces du plan. Une telle rotation conduit à la coïncidence du plan donné avec l'un des plans de projection. Ce dernier porte alors en

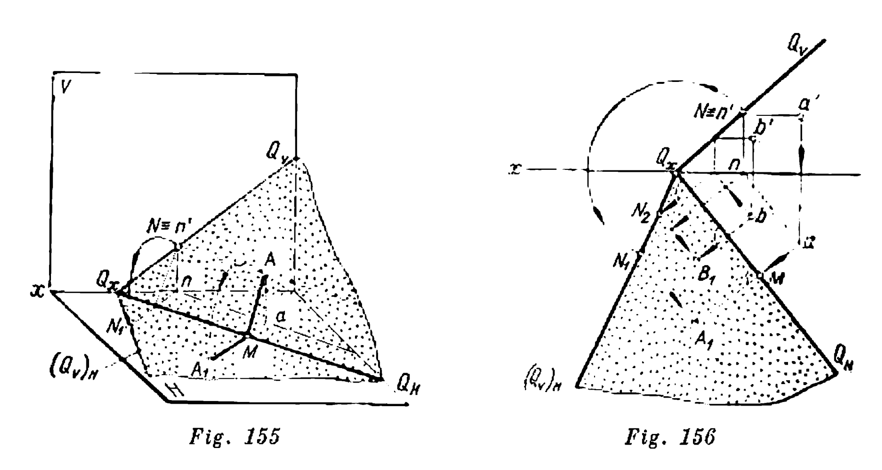


Fig. 155 *Fig. 156*

vraie grandeur l'image des figures qui appartiennent au plan rabattu. Ce cas particulier de la rotation ne contient au fond rien de nouveau. C'est pourquoi nous allons nous borner à décrire certaines de ses caractéristiques.

Les figures 155 et 156 représentent les constructions effectuées en rabattant un plan quelconque Q sur le plan H.

La charnière est constituée dans ce cas par la trace horizontale du plan Q_H. Tous les points de cette droite restent fixes. Un autre point quelconque du plan Q, A par exemple, décrit un arc de circonférence dans le plan perpendiculaire à la charnière, et sa projection horizontale a se déplace suivant la droite aM, perpendiculaire également à la charnière qui est la trace Q_H. Une fois confondu avec le plan H, le point A doit se trouver sur la droite aM à une distance de Q_H égale au rayon de rotation du point A. La longueur du rayon AM peut être déterminée comme hypoténuse du triangle rectangle de côtés Aa et aM.

Pourtant le rabattement sur le plan H d'un point quelconque A du plan Q n'impose pas la définition du rayon de rotation AM. Il

est recommandé de procéder d'une autre manière : de rabattre d'abord sur H une des droites menées dans le plan Q par le point donné A, puis de déterminer sur cette droite la position du point A.

Il est d'usage de prendre pour cette droite une parallèle à la charnière. Dans l'exemple considéré (voir fig. 155 et 156) par le point A dans le plan Q on a mené une horizontale AN. En tournant autour de la trace Q_H, l'horizontale AN reste parallèle à cette trace. Pour construire une nouvelle position de l'horizontale, il faut rabattre sur H sa trace constituée par le point N. La position rabattue

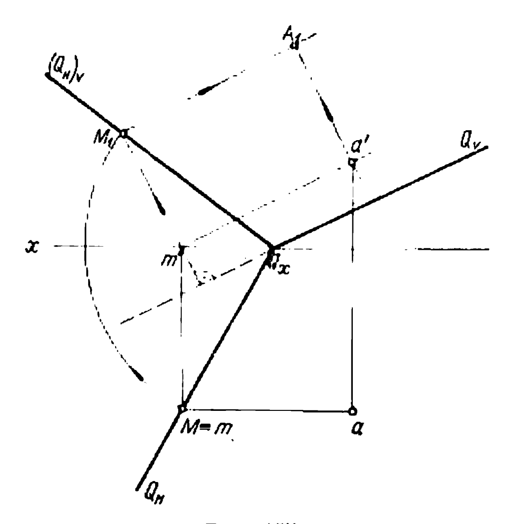


Fig. 157

N_1 du point N doit se situer sur la droite qui matérialise le déplacement de sa projection horizontale n, à la distance NQ_x du point fixe de rencontre des traces Q_x.

Sur l'épure (voir fig. 156), la droite nN_1 perpendiculaire à la charnière (à la trace Q_H) est menée par la projection horizontale n de la trace frontale N de l'horizontale AN. C'est une droite qui matérialise le déplacement de la projection horizontale du point N. Ensuite du point Q_x comme d'un centre on décrit un arc de rayon Q_xN jusqu'à son intersection avec la droite nN_1. Une horizontale rabattue sur H et parallèle à la charnière est ensuite menée par le point N_1 ainsi trouvé.

L'intersection de l'horizontale avec la perpendiculaire à Q_H, suivant laquelle se déplace a, détermine le point cherché A_1. Lorsque le rabattement se fait pour plusieurs points du plan Q, ce qui est parfois nécessaire pour déterminer la vraie grandeur des figures,

la construction des traces frontales rabattues des droites auxiliaires (horizontales) devient quelque peu plus simple, car ces traces se situent sur la même droite, trace frontale du plan rabattu sur H. La trace frontale du plan Q rabattue sur H est désignée par convention $(Q_V)_H$. Sa position est déterminée par deux points, le point fixe Q_x et le point N_1 obtenu par construction.

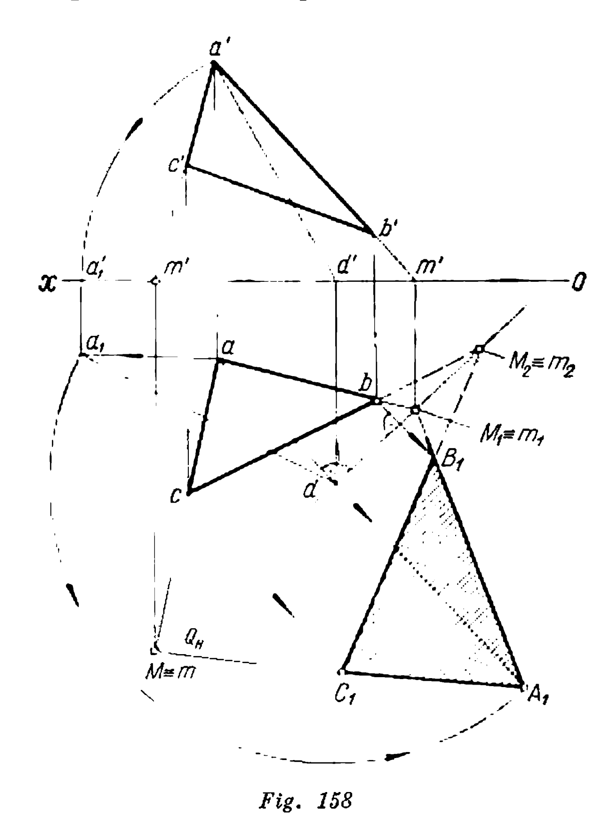


Fig. 158

La figure 156 montre comment l'utilisation de $(Q_V)_H$ permet de construire la position rabattue du point B_1 appartenant au plan Q.

Le rabattement du point A sur le plan V par rotation autour de Q_V est représenté sur la figure 157.

Dans l'exemple considéré le point A est « lié » au plan Q par une frontale. Le rabattement sur le plan V s'effectue en premier lieu pour la trace horizontale de la frontale. Sa projection m' se déplace suivant une droite perpendiculaire à la charnière (à la trace Q_V). L'intersection de cette droite avec l'arc de rayon Q_xM décrit

à partir de Q_x détermine justement la trace horizontale de la frontale rabattue sur le plan V. La frontale rabattue sur V passe par le point obtenu M_1 parallèlement à Q_V. L'intersection de la frontale avec la perpendiculaire à Q_V suivant laquelle se déplace a' est le point cherché A_1. En joignant M_1 et le point de rencontre fixe Q_x on obtient $(Q_H)_V$, trace horizontale du plan Q rabattu sur V.

L'application du rabattement pour la détermination d'une figure plane en vraie grandeur est illustrée par l'exemple représenté sur la figure 158. Deux projections du triangle ABC permettent de construire la trace horizontale Q_H du plan du triangle donné. Cette trace Q_H est choisie justement comme charnière. Les projections horizontales de tous les sommets du triangle se déplacent perpendiculairement à cette trace. Les rayons de rotation de chacun d'eux déterminent la distance entre Q_H et la position du sommet rabattu correspondant. Pour construire le triangle en vraie grandeur, il suffit de déterminer le rayon de rotation AD d'un seul de ses sommets, de A par exemple, ce qui est fait sur la figure 158 par la méthode de la rotation.

Il a fallu évidemment construire tout d'abord les projections ad et $a'd'_1$ de ce rayon. Le segment da_1 ainsi obtenu est porté à partir du point d dans le sens de la droite suivant laquelle se déplace a. On établit ainsi la position rabattue du sommet A_1.

Les prolongements des côtés du triangle AC et AB coupent Q_H en M et M_1 dont les positions ne changent pas pendant la rotation. Après le rabattement, les prolongements des côtés passent également par ces points. En joignant A_1 à M et M_1 on obtient des droites sur lesquelles doivent se trouver les sommets B_1 et C_1. Leur position est déterminée par l'intersection des droites A_1M et A_1M_1 avec les perpendiculaires à Q_H suivant lesquelles se déplacent les projections horizontales b et c.

D'autres exemples d'application de la méthode du rabattement à la solution des problèmes métriques sont donnés dans le § 32.

§ 32. Application des méthodes de transformation des projections à la solution des problèmes métriques

Détermination des distances

1. Distance de deux points. Le problème se réduit à déterminer la vraie longueur d'un segment qui joint deux points donnés. Pour le résoudre, il faut transformer l'épure et rendre le segment donné parallèle à l'un des plans de projection (voir le premier des quatre problèmes fondamentaux examinés dans ce qui précède).

2. Distance d'un point à une droite. Nous avons montré au § 26 que la solution de ce problème se complique en fonction des pro-

jections données. Des trois cas examinés sur les figures 121, 122 et 123, le plus simple est le premier, lorsque la droite BC compose avec H un angle droit et se projette sur ce plan sous forme de point.

Mais on peut toujours aboutir à ce cas particulier de la position d'une droite BC en utilisant les constructions données dans ce qui précède pour la solution du deuxième problème fondamental.

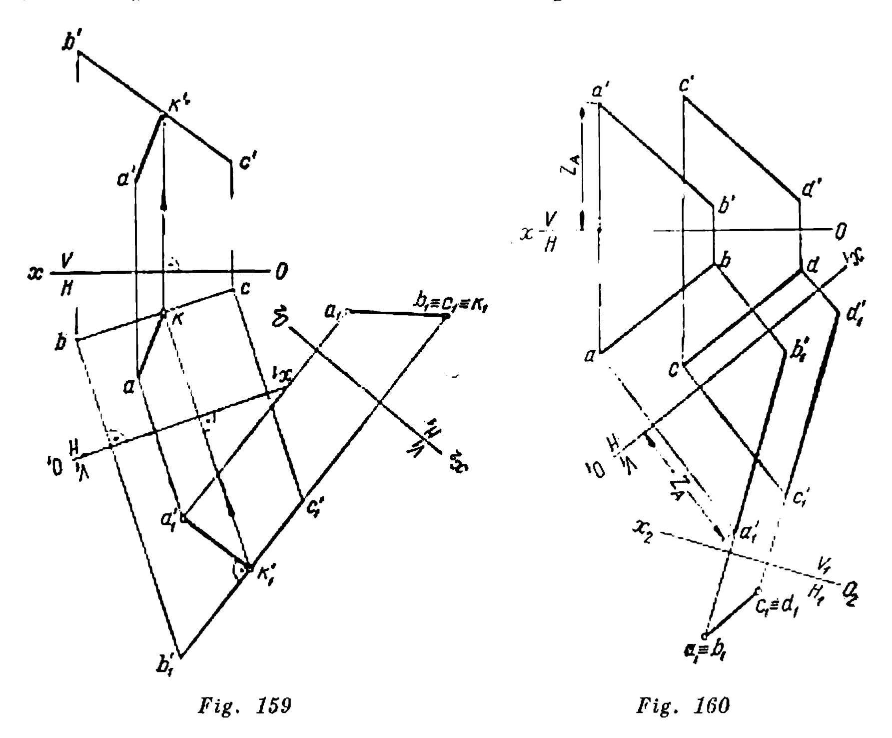


Fig. 159 *Fig. 160*

Rappelons que la transformation des projections d'une droite quelconque en un point nécessite un double changement de plans, ce qui est effectivement réalisé sur la figure 159. La droite BC est devenue droite projetante par rapport au plan H_1, et sa projection sur H_1 est le point $b_1 \equiv c_1$. Le point donné A est également projeté sur ce même plan H_1. La distance entre la nouvelle projection a_1 du point A et la nouvelle projection $b_1 \equiv c_1$ de la droite BC est la distance cherchée.

La figure 159 représente également l'opération inverse de la transformation des projections du segment AK d'un système V_1/H_1 en un système initial V/H. Notons que la projection du segment AK sur le plan V_1 est rendue parallèle à l'axe O_2x_2 car ce segment est parallèle au plan H_1.

3. Distance de deux droites parallèles. Sur la figure 160 les projections de deux droites parallèles quelconques sont transformées en points par double changement des plans de projection. L'élément cherché est la distance entre ces points. En effet, lors du deuxième changement de plan de projection, le plan H_1 forme un angle droit avec les droites données. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque d'une droite sur l'autre est donc parallèle au plan H_1 et se projette sur ce plan en vraie grandeur.

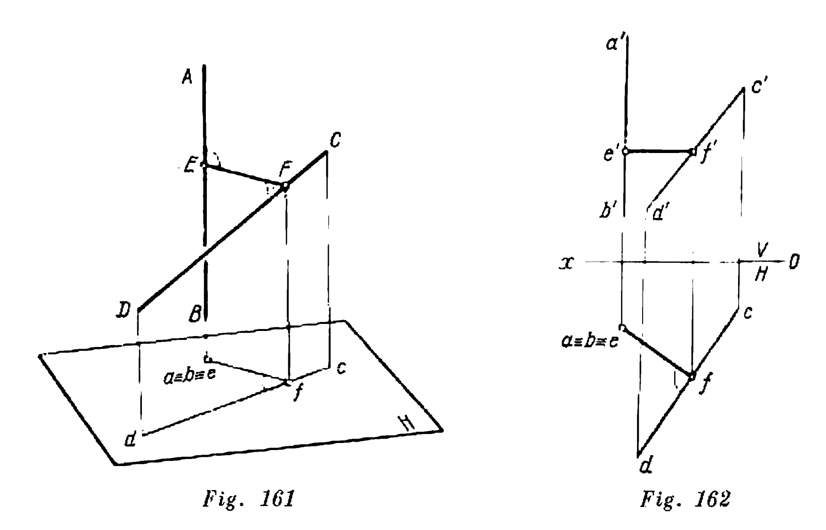


Fig. 161　　　*Fig. 162*

4. Distance de deux droites gauches (fig. 161). Cette distance est mesurée par la longueur de la perpendiculaire EF commune aux droites données. Si l'une d'elles, AB par exemple, est perpendiculaire au plan H, la perpendiculaire commune EF en tant que droite formant un angle droit avec AB est parallèle au plan H. Mais alors l'angle droit compris entre EF et la deuxième des droites gauches CD, c'est-à-dire l'angle $\widehat{EFD}$ se projette sur le plan H en vraie grandeur. Pour ce cas particulier ($AB \perp H$), le problème est résolu sur la figure 162.

L'exemple de la figure 163 se distingue par une de ces droites gauches parallèle au plan V. Cela rend possible l'application de la solution donnée par l'épure précédente en ne recourant qu'à un seul changement de plans de projection. Les constructions dans le système V/H_1 sur la figure 163 ne se distinguent en rien de celles effectuées sur la figure 162.

Dans le cas général, lorsque chacune des droites gauches n'est parallèle à aucun des plans de projection, le problème consiste à

transformer l'épure de façon à réduire en un point la projection d'une des droites données. Cela peut être obtenu soit par un double chan-

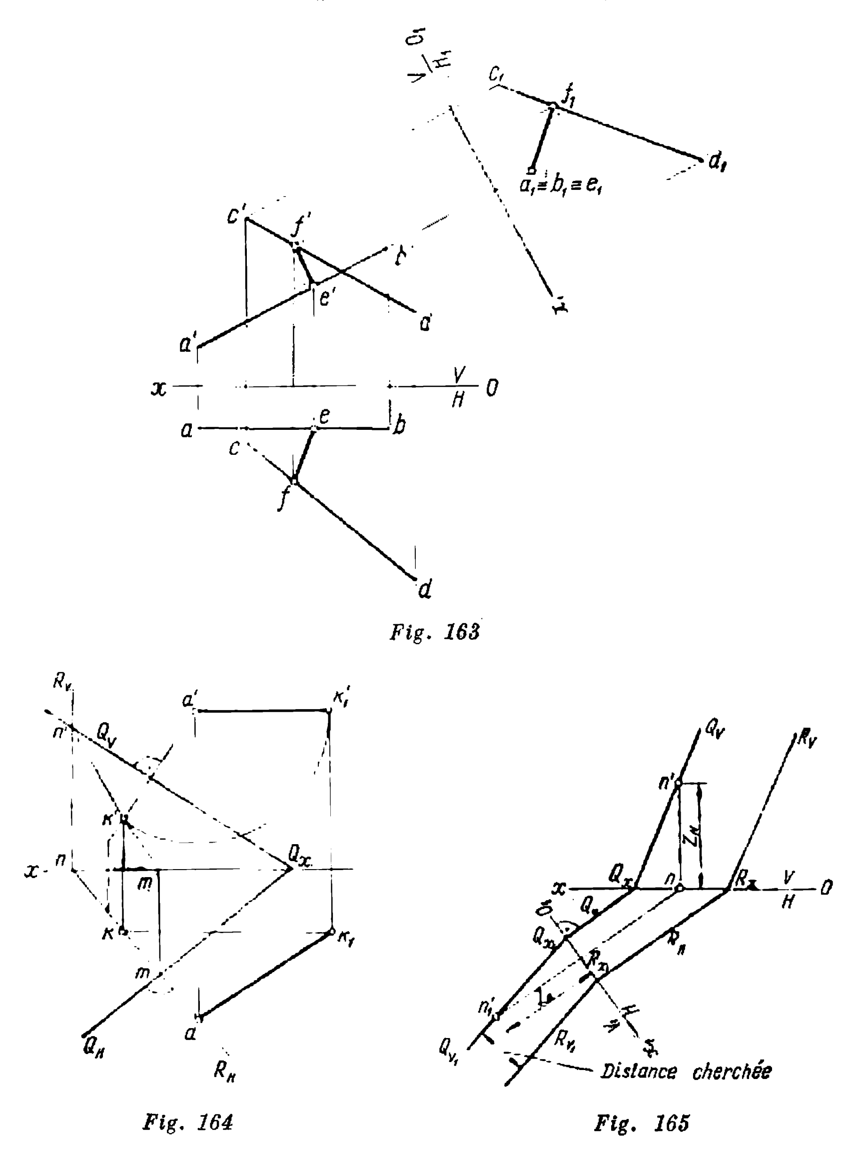


Fig. 163

Fig. 164

Fig. 165

gement de plans, soit par deux rotations du système des droites gauches (voir deuxième problème fondamental).

5. Distance d'un point à un plan. Cette distance est mesurée par la longueur de la perpendiculaire abaissée du point donné A sur le plan Q (fig. 164). On mène d'abord les projections de la perpendiculaire ak et $a'k'$ sous un angle droit aux traces du plan. Ensuite, à l'aide d'un plan auxiliaire R, on trouve le point K d'intersection de la perpendiculaire avec le plan Q. La vraie grandeur de la distance cherchée (segment ak_1) est déterminée par une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan V et passant par le point donné A.

6. Distance de deux plans parallèles. Dans le cas considéré la distance est mesurée par la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque d'un plan sur l'autre. Ce problème se ramène ainsi à la solution du problème précédent.

Mais la solution la plus avantageuse est celle présentée par la figure 165 où les deux plans sont transformés par changement en plans projetants (voir troisième problème fondamental). La distance recherchée est celle des traces frontales nouvellement obtenues des plans donnés.

Détermination des angles

1. Angle formé par deux droites concourantes. Si un plan déterminé par deux droites concourantes AB et AC est rendu parallèle à H, l'angle BAC se projette sur le plan H en vraie grandeur.

A cet effet l'horizontale BC de la figure 166, menée dans le plan des droites données, est choisie comme charnière.

La construction ultérieure est analogue à celle de la solution du quatrième problème fondamental par la méthode de la rotation. Notons que sur la figure 166 le centre de la circonférence décrite par le sommet A est désigné par O.

2. Angle formé par deux droites gauches. La mesure de cet angle est donnée par l'angle formé par deux droites concourantes parallèles aux droites gauches données. Là aussi le problème se ramène à la détermination de la vraie grandeur du triangle, ce qu'on peut faire par n'importe quelle des méthodes connues (voir la solution du quatrième problème).

3. Angle formé par une droite et un plan. On appelle angle formé par une droite AB et un plan Q (fig. 167) l'angle aigu φ compris entre cette droite et sa projection sur le plan Q. La construction des projections de l'angle φ implique la détermination de deux points K et K_1, dont le premier est le point d'intersection de la droite donnée avec le plan Q, et le deuxième, le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque A de la droite sur le même plan Q. Après avoir obtenu deux droites concourantes en K, on détermine

la vraie grandeur de l'angle qu'elles forment par la méthode décrite sous le numéro 1.

Lorsque le problème n'impose que la détermination de la valeur de l'angle formé par une droite et un plan sans l'obtention de ses projections, la solution peut être nettement simplifiée en omettant la construction des points K et K_1.

En effet, considérant le triangle rectangle AK_1K (voir fig. 167), nous remarquons que $\varphi = 90° - \varphi_1$, où φ_1 est l'angle compris entre la droite donnée AB et la perpendiculaire au plan Q. La construction des projections de cet angle φ_1 n'impose pas la détermination ni du point K ni du point K_1 (fig. 168). Les deux projections de l'angle φ_1 servent à déterminer sa vraie grandeur et son complémentaire. L'angle complémentaire ainsi obtenu est justement l'angle cherché.

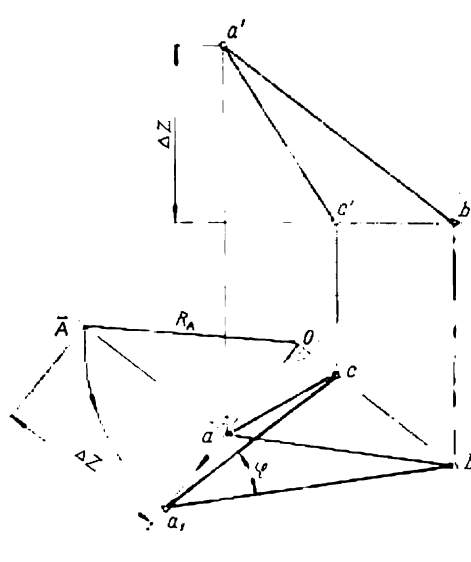


Fig. 166

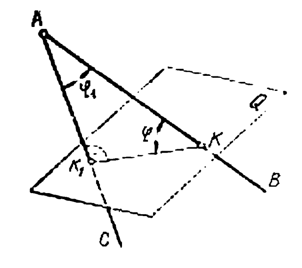


Fig. 167

4. Angle formé par deux plans. L'intersection de deux plans Q et R forme quatre dièdres égaux deux à deux (fig. 169). Chacun d'eux est mesuré par l'angle plan, dit rectiligne du dièdre, obtenu en coupant les plans Q et R par un troisième plan S perpendiculaire à leur droite d'intersection EF. Il est aisé de prouver que l'*angle formé par deux plans est égal à l'angle compris entre les perpendiculaires à ces plans.* En effet, le plan S déterminé par deux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de l'espace K sur les faces Q et R est perpendiculaire à ces faces ainsi qu'à l'arête EF de l'angle dièdre. Les droites AB et BC d'intersection du plan S avec les plans Q et R forment également des angles droits avec l'arête EF. Les droites AB et BC constituent donc les deux côtés d'un angle rectiligne qui mesure l'angle dièdre. Mais $KN \perp AB$ et $KM \perp BC$, d'où l'on déduit que $\varphi_1 = \varphi_2$.

On a intérêt à mettre à profit cette égalité pour trouver l'angle formé par deux plans dont chacun est déterminé sur l'épure par ses traces (fig. 170). En abaissant d'un point quelconque K des perpendiculaires sur les plans donnés, on obtient deux droites qui se coupent en K. L'angle qu'elles composent est égal à l'angle cherché formé par les plans Q et R.

La figure 171 présente la solution du même problème par la méthode du changement de plans de projection, les faces étant données d'une autre façon.

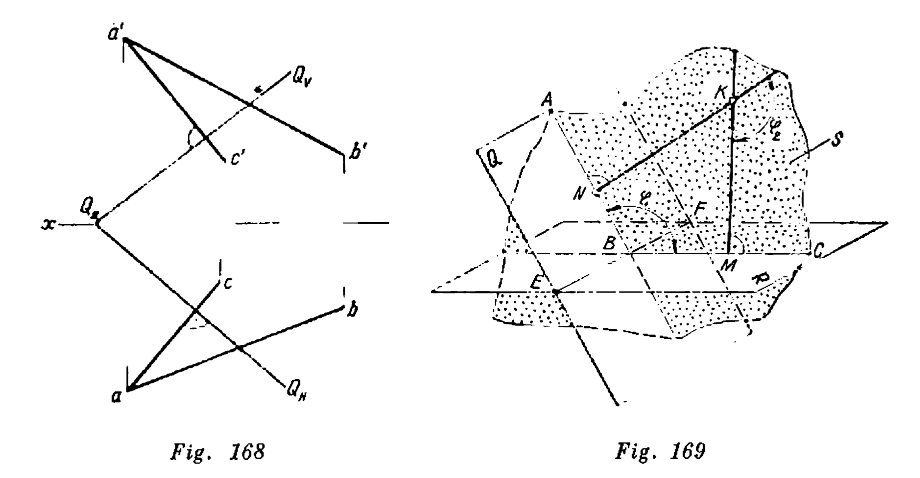


Fig. 168 *Fig. 169*

L'arête du dièdre dans cet exemple est constituée par le côté commun aux deux triangles, la droite AB. Un double changement de plans transforme la projection de AB en un point. Le plan H_1 perpendiculaire à AB est parallèle aux côtés de l'angle rectiligne qui mesure l'angle dièdre φ recherché.

La détermination des dièdres formés par un plan quelconque Q et les plans de projection a été examinée dans ce qui précède lors de l'étude de la transformation du plan Q en plan projetant (voir la solution du problème 3). Sur les figures 134 et 135 les angles α (entre Q et H) et β (entre Q et V) ont été trouvés par la méthode du changement de plans de projection. Les figures 172 et 173 illustrent l'application de la méthode du rabattement pour la détermination des angles α et β. L'arête du premier angle est constituée par Q_H, et celle du deuxième, par Q_V. Le plan de l'angle rectiligne qui mesure l'angle entre Q et H est mené perpendiculaire à Q_H. L'angle rectiligne α contenu dans le plan projetant vertical R se projette sur H en une droite confondue avec R_H. Rabattant le plan R sur V par rotation autour de R_V comme charnière on trouve le point A_1 qui

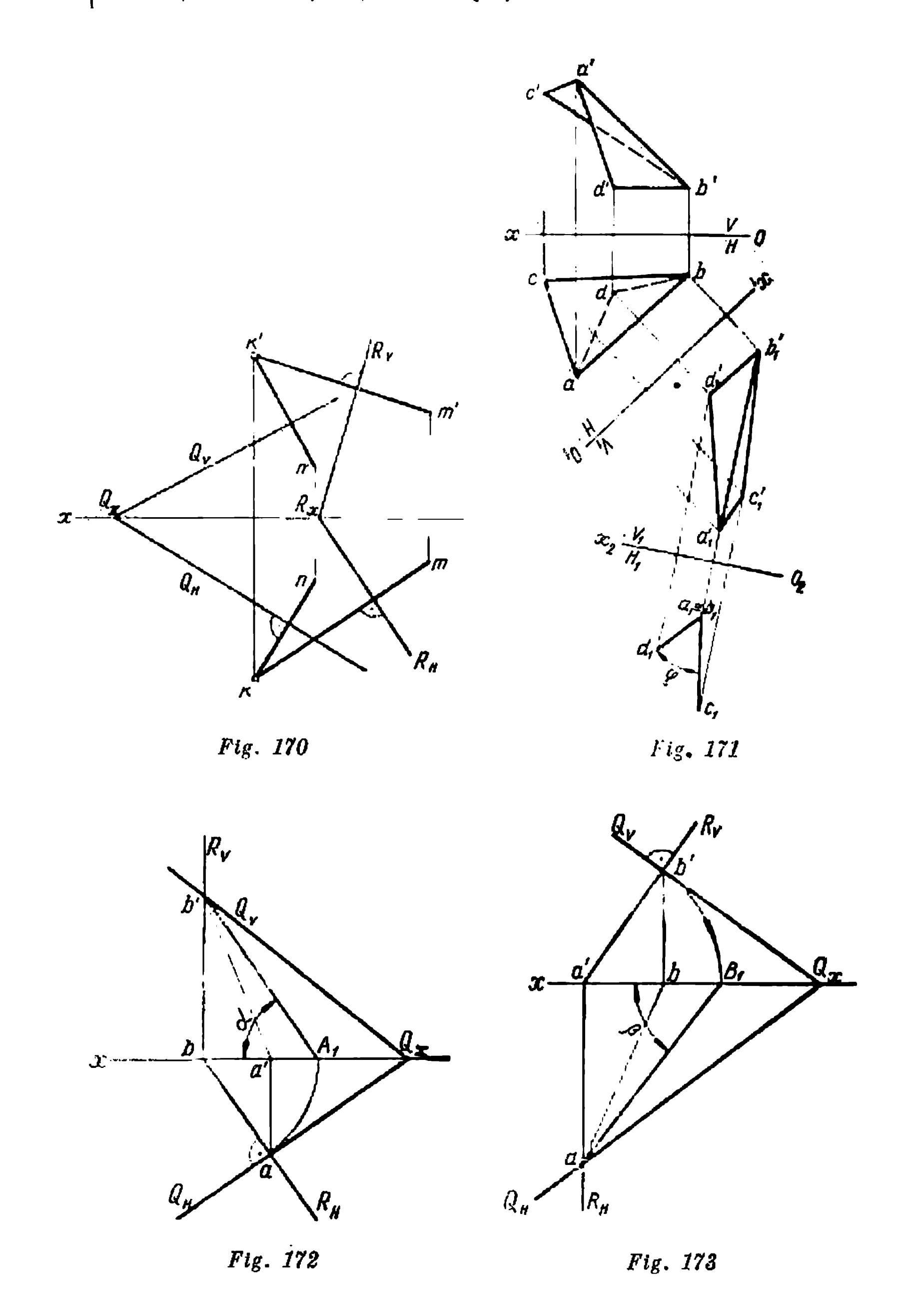


Fig. 170

Fig. 171

Fig. 172

Fig. 173

est la nouvelle position du sommet de l'angle cherché. L'angle compris entre l'axe Ox et la droite A_1b' est celui qu'on cherche.

L'angle β est déterminé d'une manière analogue. Le plan R qui contient le rectiligne est tracé dans ce cas perpendiculaire à Q_V en le rabattant ensuite sur H. La position du sommet de l'angle β rabattu sur H est désignée par B_1.

Construction des projections d'une figure plane suivant les conditions imposées

Le problème à résoudre consiste à construire un triangle équilatéral ABC dans le plan donné Q, le rayon du cercle circonscrit étant R

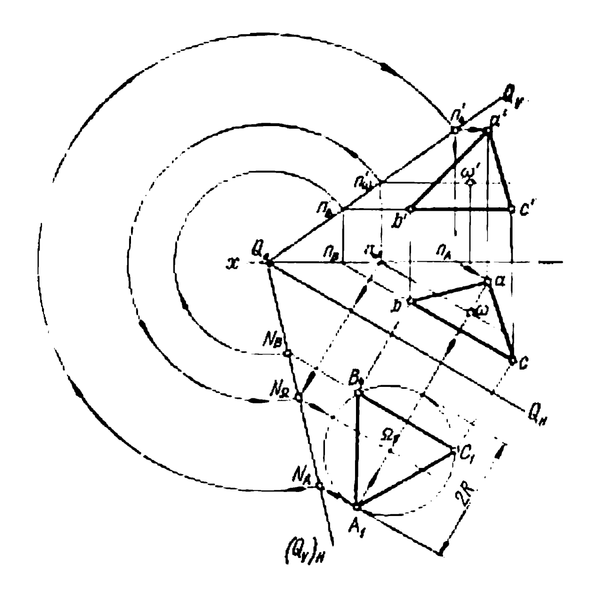


Fig. 174

et le centre de celui-ci, Ω. La solution du problème donnée par la figure 174 est recherchée dans l'ordre suivant.

1. Rabattre le plan Q sur H. La trace frontale rabattue du plan $(Q_V)_H$ est construite à l'aide de deux points Q_x et N_Ω. Le deuxième de ces points constitue la trace frontale rabattue sur H de l'horizontale qui porte le point Ω.

2. Mener par le point N_Ω parallèlement à Q_H l'horizontale rabattue à laquelle appartient le point Ω.

3. Déterminer la position rabattue du point Ω_1, centre du cercle circonscrit.

7—725

4. Construire le cercle et y inscrire le triangle équilatéral $A_1B_1C_1$.

5. Dans le plan rabattu faire passer par chaque sommet des horizontales A_1N_A, B_1N_B, C_1N_B (ces deux dernières se confondent) jusqu'à leur intersection avec $(Q_V)_H$. Ces horizontales doivent être déplacées par relèvement en position initiale du plan Q.

6. Décrire du point Q_x comme d'un centre un arc de rayon Q_xN_A jusqu'à son intersection avec Q_V en n'_A. L'autre projection n_A de ce point se trouve sur l'axe Ox.

7. Mener les projections de l'horizontale qui porte le sommet A : la projection frontale par n'_A et la projection horizontale par n_A.

8. Mener par le sommet A_1 rabattu sur H une droite perpendiculaire à Q_H. Cette droite matérialise le déplacement de la projection horizontale du point A_1 lors du relèvement du plan. La projection horizontale a du sommet A est l'intersection de la perpendiculaire à Q_H avec la projection de l'horizontale déjà menée.

9. Déterminer enfin a' comme l'intersection de la perpendiculaire à l'axe Ox avec la projection frontale de l'horizontale.

Trouver de la même façon les projections des autres sommets du triangle ABC.

Dans cette construction relativement compliquée l'essentiel consistait à *mener dans le plan rabattu par chaque sommet du triangle des droites, horizontales du plan Q, dont la rotation amorçait le relèvement du plan. La première étape de cette opération se terminait par la construction des projections des horizontales, et la deuxième permettait de déterminer sur les projections des droites obtenues précédemment les projections des sommets de la figure plane donnée.*

POLYÈDRES

§ 33. Généralités. Génération de certains polyèdres

On appelle polyèdre un ensemble de polygones plans dont chaque côté est simultanément le côté d'un autre polygone (d'un seul).

Ces polygones sont les *faces du polyèdre*, leurs côtés en sont les *arêtes*, et leurs sommets en sont les *sommets*. L'ensemble de toutes les faces d'un polyèdre forme une surface polyédrique. Nous

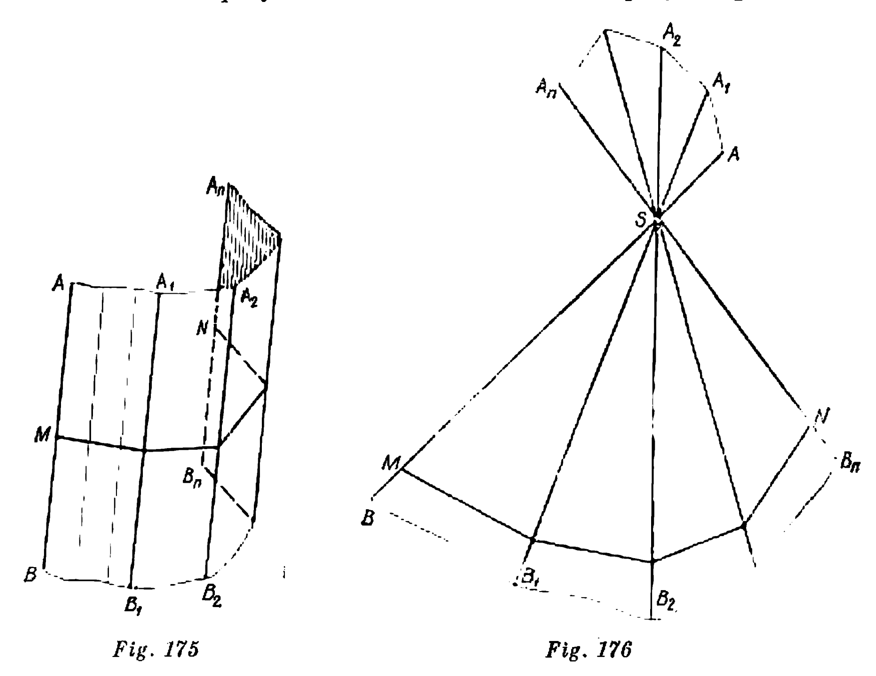


Fig. 175 *Fig. 176*

n'étudierons que les polyèdres convexes, c'est-à-dire ceux qu'on peut situer du même côté du plan d'une quelconque de leurs faces.

Les surfaces de certains polyèdres sont engendrées selon des principes définis. Ainsi, la *surface latérale des prismes* (surface prismatique) est engendrée par une droite AB qui se déplace en s'appuyant sur une directrice brisée MN tout en restant parallèle à elle-même (fig. 175). La surface latérale des pyramides (surface pyramidale) s'obtient par le déplacement d'une droite AB passant par un point fixe S en s'appuyant sur une directrice MN (fig. 176).

Dans le cas limite lorsque la directrice brisée se transforme en une courbe, la surface prismatique devient cylindrique, et la surface pyramidale, conique.

§ 34. Projections des polyèdres. Visibilité des arêtes

La position d'un polyèdre dans l'espace peut être donnée de différentes façons : soit par les coordonnées de ses sommets, soit par une base et une hauteur (si le polyèdre est droit et régulier), soit encore par une de ses faces (s'il est régulier), le nombre de celles-ci étant connu.

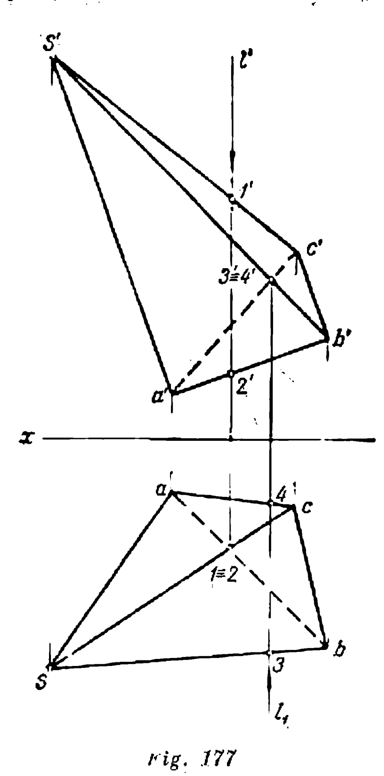


Fig. 177

L'établissement de la visibilité des arêtes d'un polyèdre sur une épure mérite une attention particulière.

Le contour extérieur de la projection d'un polyèdre est toujours visible. Quant à la visibilité des projections des arêtes à l'intérieur du contour, elle est déterminée par les rayons visuels perpendiculaires à H et à V qui passent par les points d'intersection des projections des arêtes.

La figure 177 représente les projections d'un tétraèdre $SABC$. Pour déterminer la visibilité des arêtes à l'intérieur du contour de la projection horizontale, on a choisi le rayon visuel L perpendiculaire au plan H et mené par le point d'intersection des projections horizontales des arêtes SC et AB. (Il faut retenir que le rayon visuel est orienté de haut en bas.) En considérant la projection frontale de ce rayon, on en déduit qu'il coupe d'abord l'arête SC en I, puis AB en II. Donc, d'en haut l'arête SC est visible.

Le rayon visuel L_1 perpendiculaire au plan V et mené par le point d'intersection des projections verticales des arêtes SB et AC révèle la position relative de ces arêtes. De l'examen de la projection horizontale de ce rayon qui coupe la projection de l'arête SB en *3* avant de couper celle de l'arête AC en *4*, on tire la conclusion que l'arête SB est plus proche de l'observateur que l'arête AC.

§ 35. Section plane des polyèdres

La section d'un polyèdre par un plan est un polygone dont les sommets et les côtés sont déterminés respectivement par l'intersection du plan donné avec les arêtes et les faces du corps donné. Ainsi, *pour construire des sections, il faut soit trouver les points d'intersection des arêtes avec le plan donné, soit construire les droites suivant*

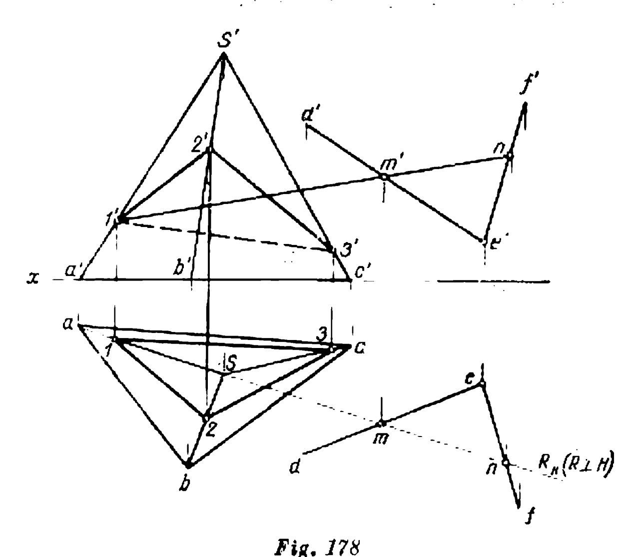


Fig. 178

lesquelles le plan coupe les faces du corps. La première méthode est appelée *méthode des arêtes*, et la deuxième *méthode des faces.* Illustrons leur application par les exemples suivants.

La section d'un tétraèdre *SABC* par un plan déterminé par des droites concourantes *DE* et *EF* est obtenue par la première méthode (fig. 178). L'épure montre seulement les constructions auxiliaires relatives à l'établissement du point d'intersection de l'arête *SA* avec le plan des droites *DE* et *EF*. Le plan projetant vertical *R* mené par l'arête *SA* n'est représenté sur la figure 178 que par la trace R_H. La droite *MN* est une droite suivant laquelle se coupent le plan considéré et le plan auxiliaire. L'intersection des projections $m'n'$ et $a's'$ détermine la projection frontale *1'* du point cherché *I*. Sa deuxième projection est déterminée par la méthode usuelle. D'une manière analogue on détermine les points d'intersection d'autres arêtes avec le plan donné.

Sur la figure 179 pour construire la section du tétraèdre par le plan *Q* donné par ses traces, on recourt aux première et deuxième

méthodes. On trouve d'abord le point I d'intersection de l'arête SA avec le plan Q. A cet effet, on mène par l'arête SA le plan projetant de bout R et construit la droite MN d'intersection de Q et de R. On construit ensuite la droite d'intersection du plan Q et de l'arête SAC. Le premier de deux points qui déterminent cette droite est le point I trouvé sur l'arête SA, pour le deuxième on choisit le point d'intersection des traces horizontales des plans considérés. C'est le point M_1 où la trace horizontale de la face SAC (arête AC)

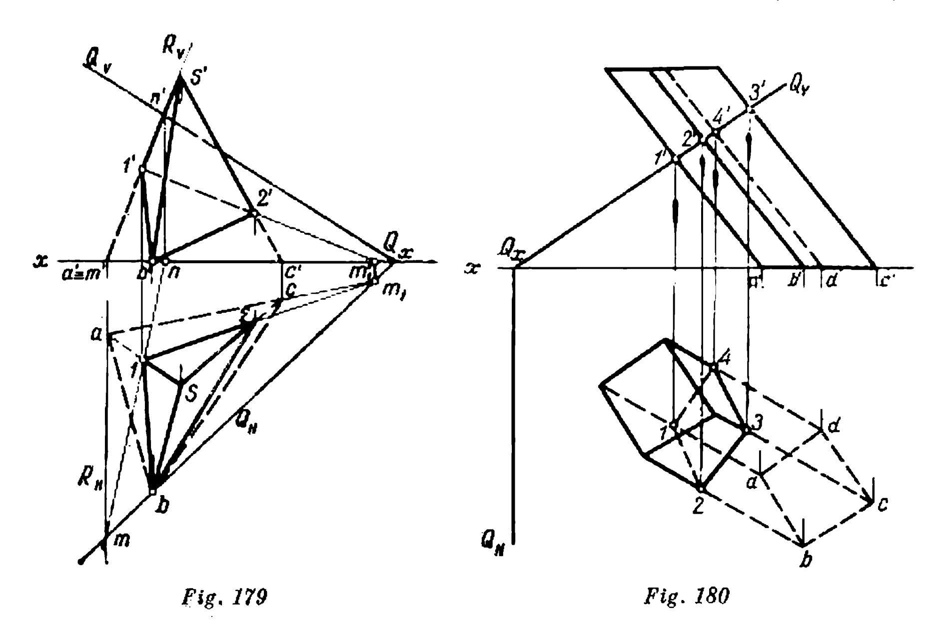


Fig. 179 *Fig. 180*

coupe Q_H. La droite IM_1 appartient au plan Q et à la face SAC. Le segment I — II de la droite ainsi construite est un des côtés de la section. En joignant les extrémités de ce segment au sommet B, on obtient un contour fermé qui donne précisément la solution du problème.

La construction de la section devient beaucoup plus simple si le plan donné est un plan projetant. Un exemple de ce type est donné par la figure 180 [1], qui illustre la construction de la section d'un prisme oblique par un plan projetant de bout. La projection frontale de la section est dans ce cas une droite qui se confond avec

---

[1] Sur la figure 180 comme sur la majorité des figures qui la suivent il n'y a qu'une seule des deux bases de prismes dont les sommets sont désignés par des lettres.

Q_V. La projection horizontale de la section cherchée *1 - 2 - 3 - 4* s'obtient en menant par les points *1'*, *2'*, *3'* et *4'* les lignes de rappel jusqu'à leur intersection avec les projections horizontales des arêtes respectives.

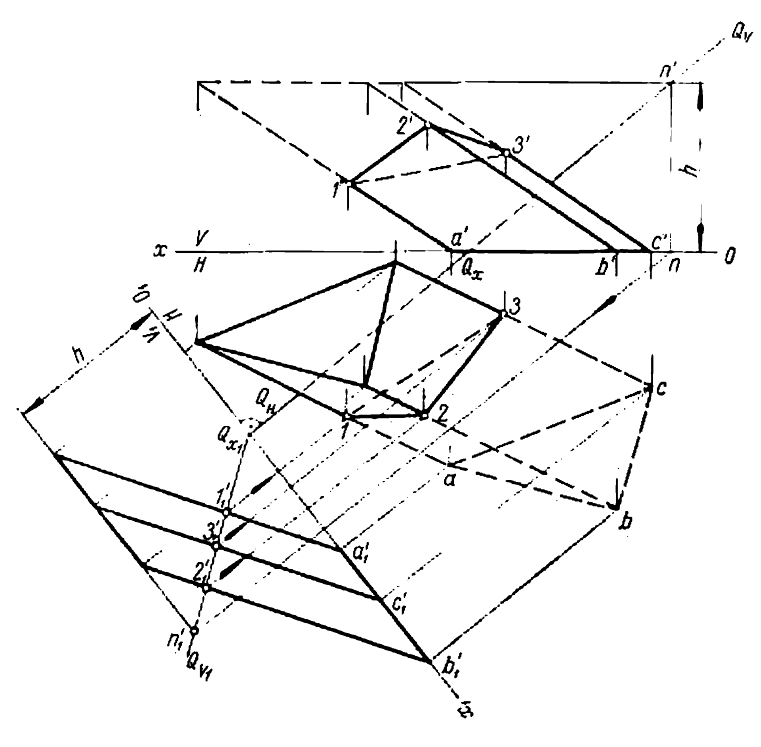


Fig. 181

On peut toujours aboutir à ce cas particulier très commode pour la solution du problème, en transformant un plan sécant quelconque en plan projetant comme cela est réalisé sur la figure 181.

En appliquant la méthode du changement de plans de projection on passe du système *V/H* au système V_1/H.

Dans le nouveau système, le plan Q est rendu plan projetant, et la section recherchée se projette sur le plan V_1 selon une droite confondue avec Q_{V_1}.

Une transformation inverse des projections du système V_1/H pour revenir au système initial permet d'obtenir les projections de la section recherchée sur les projections du prisme de départ.

§ 36. Intersection d'une droite et d'un polyèdre

Le problème de la détermination des points d'intersection d'une droite avec la surface d'un polyèdre est résolu d'une manière analogue au problème de l'établissement du point d'intersection d'une

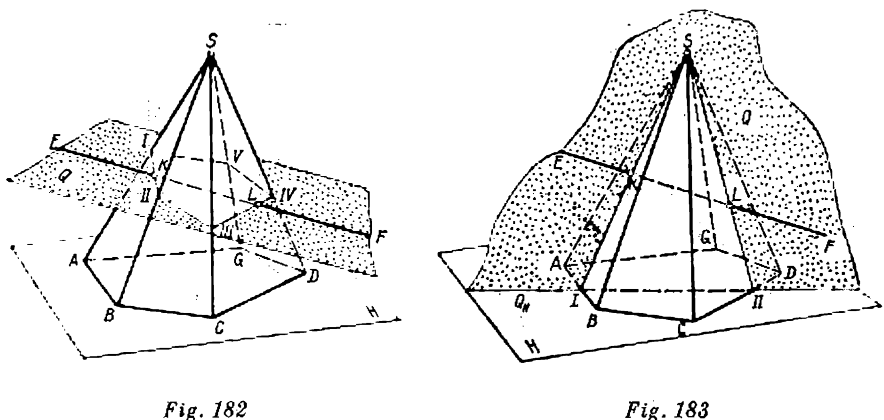


Fig. 182 Fig. 183

droite et d'un plan. Dans le cas considéré la solution s'obtient également en trois étapes:

1) *mener par la droite donnée EF un plan auxiliaire Q*;
2) *construire la section du polyèdre par le plan Q*;
3) *déterminer les points d'intersection de la droite EF avec le contour de la section.* (On les appelle souvent points « d'entrée » et « de sortie ».)

Sur la figure 182 les points cherchés K et L sont trouvés par l'intersection de la droite EF avec le contour d'une section plane. L'aspect d'une section plane est défini pour beaucoup par la position relative du plan auxiliaire Q par rapport au sommet de la pyramide S.

En effet, *si le plan Q passe par le sommet d'une pyramide à n angles quelconques, sa section est toujours un triangle* (il s'agit d'un polyèdre convexe). On l'appelle par convention *plan sécant simple.*

Sur la figure 183 un tel plan sécant simple Q est mené par la droite EF. La position de ce plan dans l'espace est déterminée par la droite donnée et le sommet de la pyramide S.

La trace Q_H du plan Q coupe la base de la pyramide en deux points I et II. En les joignant au sommet S on obtient le contour de la section. Il reste à marquer les points K et L d'intersection de la droite EF avec la section plane $ISII$ ainsi établie.

Lorsqu'il s'agit du prisme à n angles, *le plan sécant simple doit passer par la droite EF parallèlement aux arêtes latérales du prisme* (fig. 184). *Un tel plan coupe le prisme à n angles quelconque suivant un parallélogramme.* La position du plan sécant simple Q sur la figure 184 est déterminée par la droite donnée EF et la droite con-

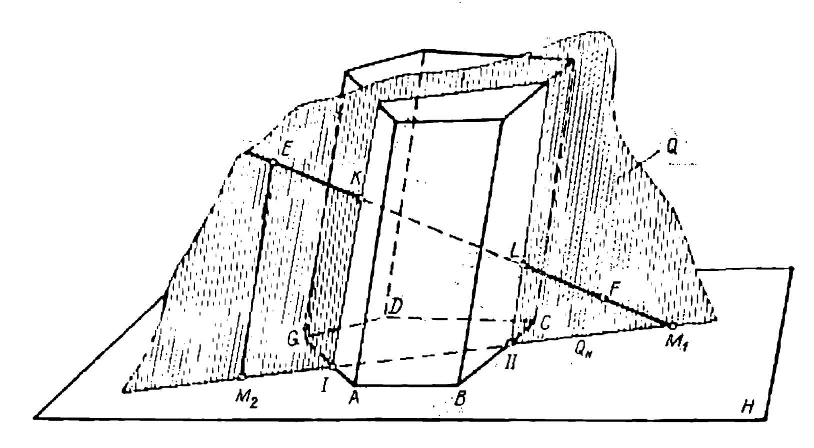


Fig. 184

courante EM_2 parallèle aux arêtes latérales du prisme. Après avoir construit la section du prisme par le plan Q, on obtient les points cherchés K et L.

Indiquons certaines particularités des solutions d'épure données par les figures 185 et 186. Pour construire sur la première d'entre elles la trace horizontale du plan sécant simple, il a fallu mener par le sommet S de la pyramide une droite concourante à la droite donnée en un point quelconque, E par exemple. Le plan sécant simple Q est alors déterminé par deux droites concourantes EF et SE. On construit les traces horizontales de chacune d'entre elles, puis on trace Q_H. Il est recommandé de construire ensuite les deux projections de la section de la pyramide constituée par le triangle $ISII$ et de déterminer indépendamment l'une de l'autre les projections des points cherchés K et L. La précision de la solution ainsi obtenue est vérifiée par les lignes de rappel qui doivent être perpendiculaires à l'axe Ox.

Pour construire le plan sécant simple du prisme de la figure 186, on fait passer par un point quelconque de la droite donnée EF, E par exemple, une droite EM_1 parallèle aux arêtes latérales du prisme. Les traces horizontales M_1 et M_2 des deux droites concourantes EF et EM_1 déterminent la trace Q_H du plan sécant simple. Après avoir marqué les points I et II d'intersection de Q_H avec la base du prisme,

on construit la projection horizontale de la section du prisme qui est le parallélogramme *1 — 3 — 4 — 2*. Les côtés de ce parallélo-

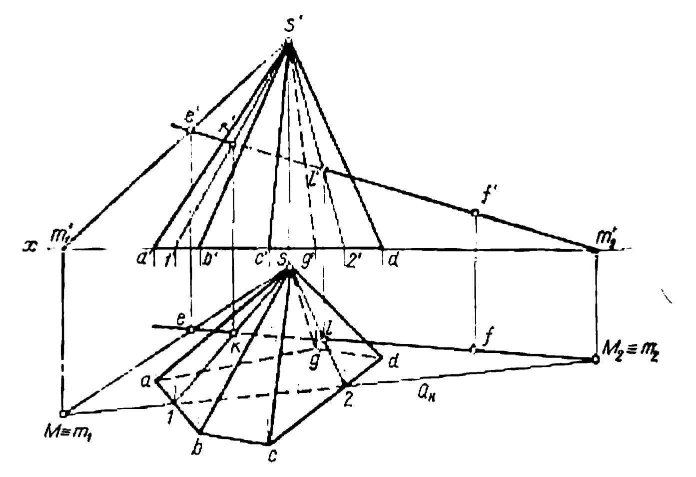


Fig. 185

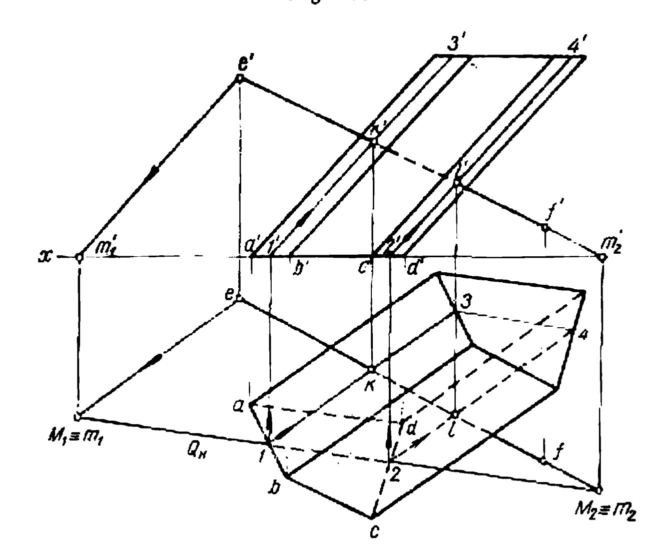


Fig. 186

gramme *1 — 3* et *2 — 4* coupent *ef* en *k* et *l*, qui sont les projections horizontales des points d'entrée et de sortie recherchés. Leurs deuxièmes projections s'obtiennent à l'aide de la projection frontale du parallélogramme *1' — 3' — 4' — 2'*.

Dans les exemples considérés la base des polyèdres se situait dans l'un des plans de projection, ce qui rendait plus aisée la solution du problème par rapport au polyèdre dont la base ne se trouve pas dans le plan *H* ou *V*. Dans ce dernier cas il faut construire non pas la trace du plan sécant simple *Q*, mais la ligne d'intersection de ce même plan auxiliaire *Q* avec la base du polyèdre. On marque ensuite l'intersection de cette droite avec le contour de la base de la pyramide ou du prisme et construit les projections de la section plane du polyèdre. L'intersection du contour de la section avec la droite donnée permet de trouver les points recherchés.

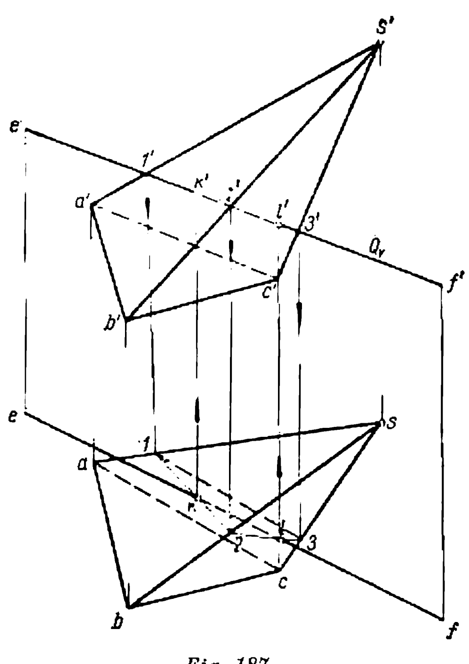


Fig. 187

La solution ainsi obtenue est très compliquée. Aussi, *lorsque la base du polyèdre ne repose pas dans un des plans de projection, il est avantageux de choisir comme plan auxiliaire un plan projetant.* Sur la figure 187 on a mené un plan projetant de bout *Q* par la droite *EF* et on a construit les projections de la section du prisme triangulaire par le plan *Q*. Le contour de la projection horizontale *1 — 2 — 3* de la section construite coupe *ef* en *k* et *l*, qui sont les projections horizontales des points cherchés. Leurs projections frontales *k'* et *l'* sont établies à l'aide des lignes de rappel.

Notons que l'utilisation des plans projetants est préférable pour des prismes et des pyramides triangulaires quelle que soit leur position. *Mais pour un polyèdre dont le nombre de faces latérales est supérieur à trois et dont la base est située dans le plan H ou V, il est plus rationnel d'employer pour la solution un plan sécant simple.*

Les plans sécants simples sont commodes surtout pour déterminer les points d'intersection d'une droite avec un cône ou un cylindre, cas examinés dans ce qui suit (§ 46), ainsi que pour construire la ligne d'intersection de deux polyèdres.

§ 37. Intersection des polyèdres

L'intersection de deux polyèdres forme un ou deux polygones plans ou gauches dont la construction nécessite d'abord l'établissement des points d'intersection des arêtes d'un polyèdre avec les faces de l'autre puis des points d'intersection des arêtes du deuxième polyèdre avec les faces du premier. En joignant d'une façon définie les points ainsi obtenus, on construit le polygone cherché

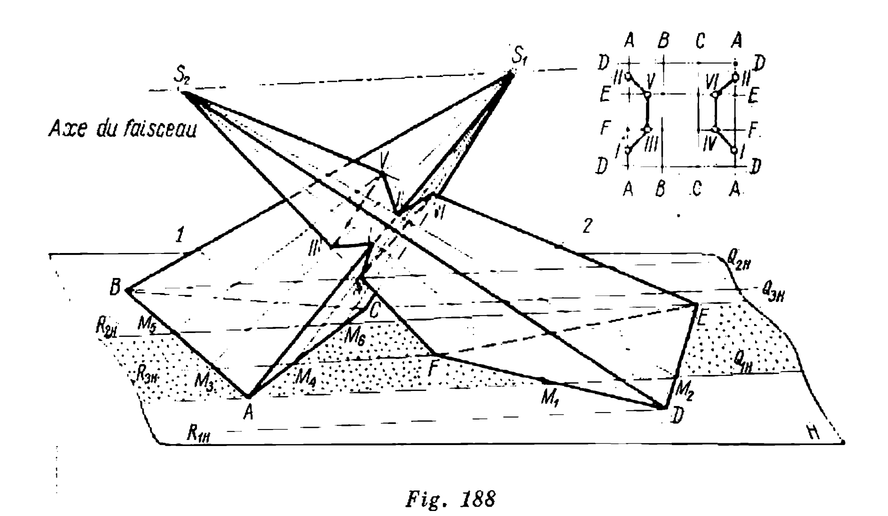


Fig. 188

dont chaque élément représente une droite d'intersection de la face du premier polyèdre avec la face du deuxième.

Ainsi, *la construction de la ligne d'intersection de deux polyèdres se ramène à la recherche de l'intersection d'une droite et d'un polyèdre.* Au § 36 nous avons montré que pour résoudre plus facilement ce problème, dans certaines conditions on fait appel aux plans projetants et dans d'autres, aux plans sécants simples. Ces derniers s'emploient dans le cas où les bases des deux polyèdres reposent dans le même plan. Les constructions sont plus simples lorsque ce plan est en même temps l'un des plans de projection.

Considérons l'application de la méthode des plans sécants simples à la construction de la ligne d'intersection des prismes et des pyramides.

1. Intersection de deux pyramides. *Un plan sécant simple doit couper les deux pyramides suivant des triangles. Cette condition est observée lorsque le plan passe par la droite S_1S_2 qui joint les sommets des pyramides* (fig. 188). Tous les plans sécants susceptibles d'être

employés pour la construction de la ligne d'intersection des polyèdres forment un faisceau dont l'axe est la droite S_1S_2. Soient deux pyramides de même hauteur représentées sur la figure 188. L'axe du faisceau de plans sécants simples est alors parallèle à H. Etant une horizontale commune aux plans auxiliaires, la droite S_1S_2 détermine la direction de leurs traces horizontales qui dans le cas considéré forment un faisceau de droites parallèles. Déterminons les points d'intersection des arêtes de la première pyramide S_1ABC

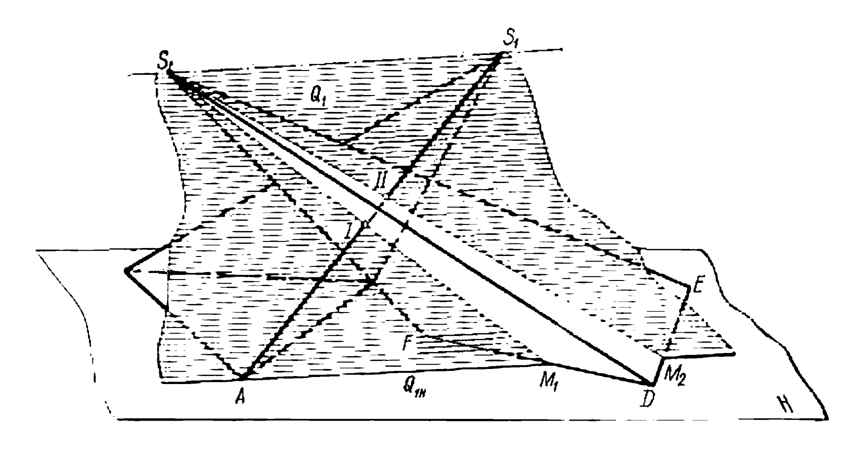


Fig. 189

avec les faces de la deuxième pyramide S_2DEF. Sur la figure 189, un plan sécant simple Q_1 est mené par l'arête S_1A. La position du plan Q_1 est déterminée par deux droites concourantes S_1S_2 et S_1A. Q_{1H} parallèle à S_1S_2 est mené par le point A, trace horizontale de l'arête S_1A. On voit sur le dessin que Q_{1H} coupe la base de la deuxième pyramide en M_1 et M_2; en joignant ces points au sommet S_2 on obtient une section plane de la pyramide (triangle $M_1S_2M_2$). Les côtés du triangle M_1S_2 et M_2S_2 en coupant l'arête S_1A déterminent les points cherchés I et II. Cette construction est réalisée également sur la figure 188. En menant des plans auxiliaires par les arêtes S_1B et S_1C, on voit que les traces des plans Q_{2H} et Q_{3H} ne coupent pas la base de la deuxième pyramide.

On en déduit que les plans Q_2 et Q_3 et par suite les arêtes S_1B et S_1C ne coupent pas les arêtes de la pyramide S_2DEF. Après l'étude de l'intersection des arêtes du premier polyèdre avec les faces du deuxième, on cherche à établir les points d'intersection des arêtes de la deuxième pyramide avec les faces de la première. Des trois plans R_1, R_2 et R_3, le premier ne coupe pas la pyramide S_1ABC. Cela

signifie que l'arête S_2D par laquelle passe R_1 ne coupe pas les faces de la première pyramide. Les points d'entrée et de sortie des deux autres arêtes sont trouvés à l'aide des sections planes que sont les triangles $S_1M_3M_4$ et $S_1M_5M_6$.

Ce sont les points *III*, *IV*, *V* et *VI*. Les deux premiers reposent sur l'arête S_2F, et les deux autres, sur l'arête S_2E. Une question se pose à présent, comment joindre les points ainsi obtenus ?

Chaque côté du polygone cherché étant une ligne d'intersection des faces de deux pyramides différentes, il ne faut joindre que les points qui appartiennent simultanément aux mêmes faces des polyèdres qui se coupent. En se guidant par cette considération on construit sur la figure 188 un polygone *I—III—V—II—VI—IV—I*. Ses points *I* et *III* sont reliés parce qu'ils reposent tous les deux sur les faces S_1AB de la première pyramide et S_2DF de la deuxième. Les points *III* et *V* reposent sur les faces S_1AB et S_2EF et déterminent le côté suivant, etc.

Pour prévenir des erreurs éventuelles dans des cas compliqués, il est recommandé d'employer, comme sur la figure 188, un réseau établi de façon définie. Ses lignes verticales doivent compter une de plus par rapport au nombre des arêtes latérales du premier polyèdre, et ses lignes horizontales, une de plus par rapport au nombre des arêtes latérales du deuxième polyèdre.

Dans le cas considéré d'intersection de deux pyramides triangulaires, on mène quatre droites verticales et quatre horizontales.

Les droites verticales correspondent aux arêtes du premier polyèdre, de la pyramide S_1ABC par exemple, et les droites horizontales, aux arêtes du deuxième polyèdre S_2DEF ; de plus, la première et la dernière droites de chaque direction correspondent à la même arête. Dans le cas considéré, les droites verticales reproduisent deux fois l'arête S_1A, et les droites horizontales, deux fois l'arête S_2D. Dans le réseau, chaque arête n'est désignée que par une lettre (les sommets S_1 et S_2 ne sont pas indiqués). Les intervalles entre les verticales du réseau correspondent aux faces du premier polyèdre, alors que les intervalles entre les horizontales, aux faces du deuxième polyèdre.

Les points obtenus sur la figure 188 sont marqués dans le réseau compte tenu de l'arête d'un polyèdre et de la face de l'autre sur lesquelles ils sont situés. Ainsi, le point *I*, celui d'intersection de l'arête S_1A avec la face S_2DF, est représenté sur la droite verticale *A* à l'intérieur de la bande limitée par les droites horizontales *D* et *F*. Le point *II* d'intersection de l'arête S_1A avec la face S_2DE, sur la droite *A* dans l'intervalle entre les droites *D* et *E*. Le point *III*, sur la droite *F* entre les droites *A* et *B*, etc., et dans ces conditions, les points appartenant aux arêtes reproduites deux fois dans le réseau sont représentés également deux fois. Ensuite on joint deux à deux

ceux des points portés dans le réseau qui se trouvent sur les côtés de la même case. Ainsi on obtient une ligne brisée $I—III—V—II—VI—IV—I$. Les points trouvés sur la figure 188 doivent être joints dans le même ordre. Il reste à établir la visibilité du polygone ainsi obtenu. *Un côté est visible s'il est à l'intersection de deux faces visibles*; *lorsqu'au moins une des faces est cachée, le côté situé sur cette face est caché lui aussi.*

L'établissement sur l'épure de l'intersection de deux pyramides de même hauteur est illustré par la figure 190. Là également l'axe du faisceau des plans sécants simples est leur horizontale. C'est pourquoi les traces horizontales des plans auxiliaires sont parallèles à S_1S_2. L'exemple de la figure 190 se distingue par le fait que l'intersection des pyramides forme deux triangles. Pour déterminer leurs sommets, on mène par chaque arête un plan sécant simple et construit la section du polyèdre par ce plan pour marquer enfin les points d'intersection de l'arête étudiée avec la section plane construite. Ainsi on mène par l'arête S_2F le plan R_1 dont la trace horizontale R_{1H} parallèle à S_1S_2 passe par la trace de même indice de l'arête (point f). Le triangle $S_1M_1M_2$ est la section de la pyramide S_1ABC par le plan R_1.

Après avoir construit les deux projections du triangle $S_1M_1M_2$ on marque les points d'intersection des projections de ses côtés avec la projection de même indice de l'arête S_2F. On obtient ainsi les projections des points I et II d'entrée et de sortie de l'arête S_2F. Les autres points sont trouvés d'une manière analogue. Les plans Q_1, Q_2 et Q_3 menés par les arêtes de la pyramide S_1ABC ne coupent pas le deuxième polyèdre. Les arêtes S_1A, S_1B et S_1C ne participent donc pas à l'intersection.

Certains problèmes liés à l'intersection des polyèdres peuvent être résolus sans construire leur ligne d'intersection. Ainsi, on peut voir quelles arêtes de chaque polyèdre participent à l'intersection, si l'intersection intéresse deux polygones et constitue une pénétration ou se réduit à un polygone et constitue un arrachement. Les réponses à ces questions s'obtiennent à l'aide des *plans limites*.

On appelle par convention plan limite d'un de deux polyèdres un plan du faisceau de plans sécants simples qui passant par l'arête du polyèdre considéré ne le coupe pas.

Dans le faisceau des plans sécants on peut toujours dégager deux plans limites pour chaque polyèdre qui participe à l'intersection.

Sur la figure 188 les plans limites de la pyramide S_1ABC sont les plans Q_1 et Q_2. Passant respectivement par les arêtes S_1A et S_1B, aucun d'eux ne coupe la pyramide S_1ABC. Les deux plans qui délimitent le polyèdre des deux côtés forment un angle dièdre dans lequel se situe la pyramide considérée. Le terme de plans limites traduit

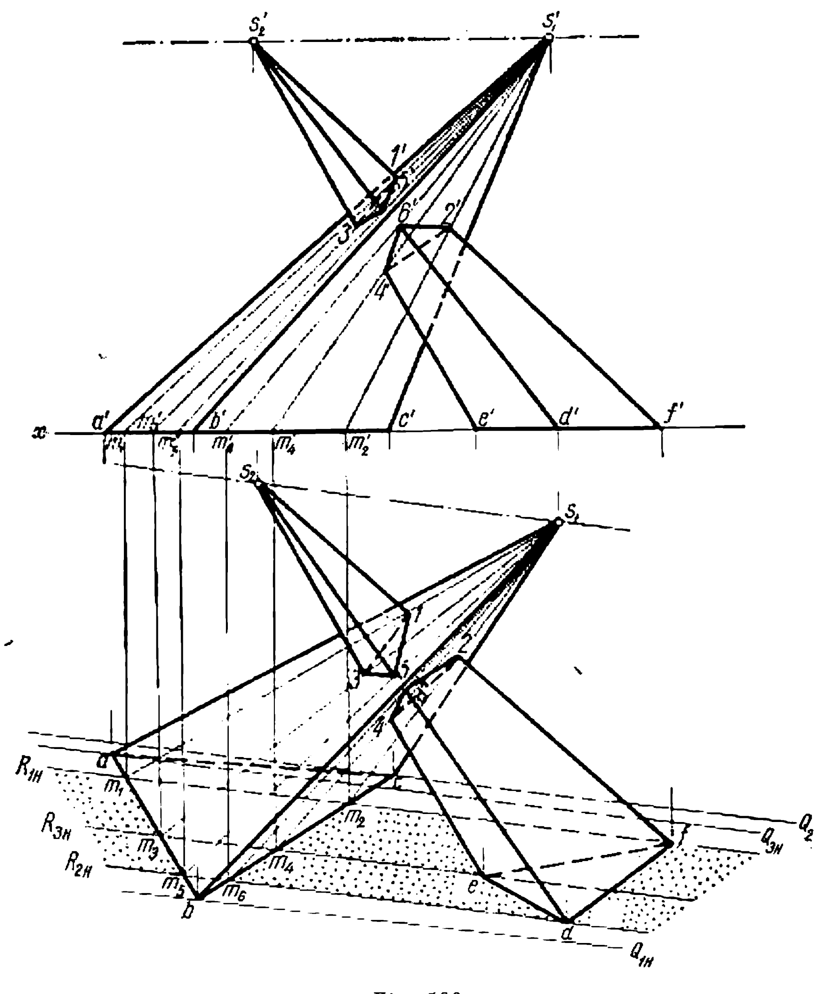


Fig. 190

dans une certaine mesure le fait que *ce sont les plans qui délimitent la partie de l'espace comprenant le polyèdre considéré.*

Sur le même dessin, les plans R_1 et R_2 sont les plans limites de la pyramide S_2DEF.

Les lettres et les indices employés pour la notation des plans limites des polyèdres de la figure 190 sont les mêmes. Etablissons la position relative des plans limites et de leurs traces pour les cas de pénétration et d'arrachement sans examiner les cas particuliers

lorsque les bases des polyèdres se coupent ou le sommet d'un polyèdre se trouve à l'intérieur de l'autre.

Considérons les figures 191, 192 et 193 qui représentent les cas de position relative différente de deux couples de plans limites appartenant au même faisceau [1].

Toutes les arêtes du deuxième polyèdre coupent les faces du premier, le deuxième polyèdre pénètre donc par toutes ses arêtes

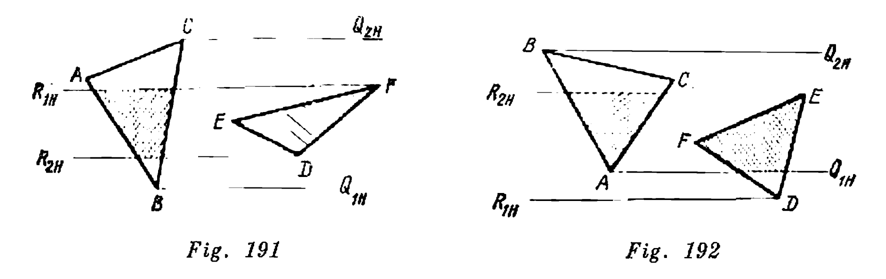


Fig. 191 *Fig. 192*

dans le premier. *La ligne d'intersection se compose alors de deux polygones.* Dans ce cas *les traces des plans limites d'un polyèdre se situent entre les traces des plans limites de l'autre* (fig. 191).

Dans le cas d'arrachement une pyramide n'est que partiellement « encastrée » dans l'autre. *L'intersection des polyèdres forme alors un seul polygone. Ce cas est caractérisé par l'alternance des traces des plans limites* (fig. 192).

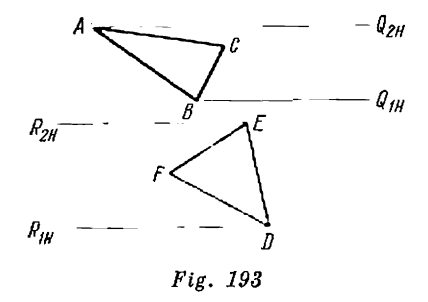


Fig. 193

Enfin, il peut y avoir une troisième variante de position relative des plans limites (voir fig. 193) correspondant au cas lorsque les polyèdres ne se coupent pas.

Ces conclusions se vérifient pour une position quelconque de l'axe du faisceau de plans sécants par rapport aux plans de projection et pour une autre combinaison des polyèdres en intersection (deux prismes, pyramide et prisme).

Si l'axe du faisceau S_1S_2 n'est pas parallèle au plan de projection H, les traces horizontales des plans limites et de tous les plans sécants passent par le même point qui est la trace horizontale de la droite S_1S_2. La figure 194 donne, pour le cas d'intersection suivant

[1] Nous proposons au lecteur d'étudier lui-même les cas où un ou deux couples de plans limites se confondent.

deux polygones, les bases de pyramides de hauteurs différentes et la position relative des traces de leurs plans limites. La figure 195 représente le cas d'une intersection suivant un seul polygone.

Un exemple de construction d'un tel polygone est donné sur la figure 196. En joignant les sommets des pyramides par une droite on obtient l'axe du faisceau de plans sécants simples et on trouve sa trace horizontale M. On mène par le point M les traces des plans limites Q_{1H}, Q_{2H} du premier polyèdre et R_{1H}, R_{2H} du deuxième. L'alternance des traces révèle que la ligne recherchée forme un seul polygone. Les arêtes qui participent à l'intersection sont celles dont les traces horizontales se trouvent à l'intérieur et sur les côtés

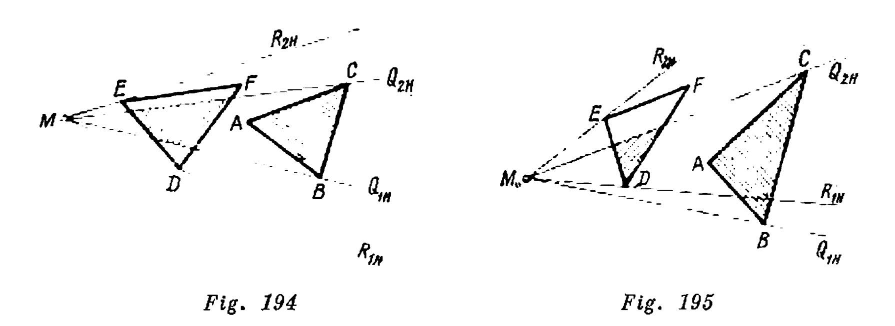


Fig. 194 *Fig. 195*

de l'angle formé par les traces Q_{1H} et R_{2H}. Dans le cas considéré, ces arêtes sont au nombre de trois: S_1B, S_1C et S_2F. Les points d'entrée et de sortie de chacune d'entre elles s'établissent à l'aide des plans sécants simples.

On fait passer, par exemple, par l'arête S_1B le plan Q_1 déterminé par les droites S_1S_2 et S_1B, c'est-à-dire par l'axe du faisceau des plans sécants simples et l'arête considérée. La section de la pyramide S_2DEF par ce plan est le triangle $S_2M_1M_2$. Les points d'intersection I et II de l'arête S_1B avec le contour du triangle $S_2M_1M_2$ sont les sommets du polygone cherché. Les autres points sont déterminés de la même façon. Le réseau représenté sur la figure 196 permet d'établir l'ordre de jonction des points.

2. Intersection d'une pyramide et d'un prisme. *Un plan sécant simple doit couper une pyramide suivant un triangle, et un prisme suivant un parallélogramme. Cette condition est observée lorsque l'axe du faisceau de plans sécants simples parallèle aux arêtes latérales du prisme passe par le sommet de la pyramide.* La figure 197 représente un des plans du faisceau mené par l'arête SA de la pyramide. La position de ce plan est déterminée par deux droites SM et SA. La figure montre que Q_H coupe la base de la pyramide en M_1 et M_2, points par lesquels sont menées des droites parallèles aux faces laté-

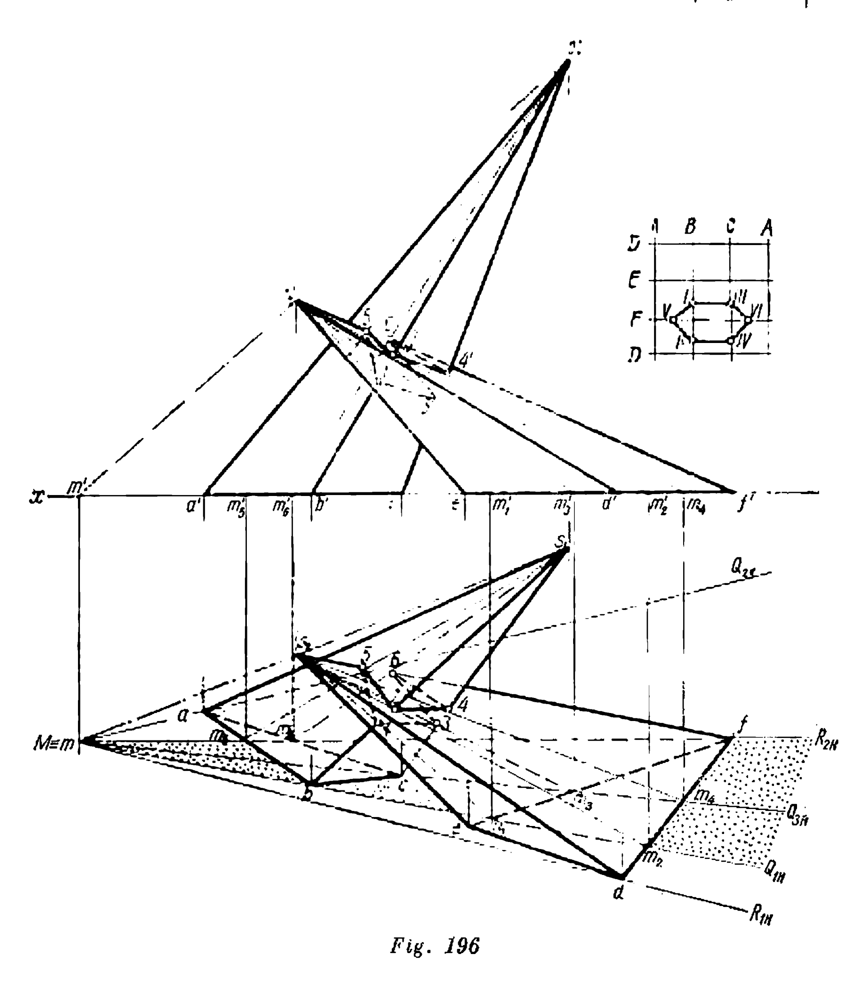


Fig. 196

rales du prisme. L'intersection de ces lignes de la section plane du prisme avec l'arête SA donne les points I et II. La construction qui vient d'être décrite est reprise sur l'épure (fig. 198) pour les arêtes SA et SC de la pyramide, de même que pour l'arête D du prisme, les autres arêtes ne participent pas à l'intersection. Le réseau ainsi obtenu permet d'établir l'ordre de jonction des points. La ligne d'intersection est ainsi un polygone, ce qu'on pouvait d'ailleurs prévoir avant la construction, car dans le cas considéré nous sommes en présence de l'alternance des traces horizontales des plans limites Q_{1H}, Q_{2H} de la pyramide et R_{1H}, R_{2H} du prisme.

3. Intersection de deux prismes. *Un plan sécant simple doit couper chacun des prismes suivant un parallélogramme. Cette condition s'observe lorsque les plans sécants auxiliaires sont parallèles aux arêtes de l'un et de l'autre prisme.* D'une façon générale, les arêtes latérales des deux prismes sont des droites gauches. *On appelle par convention plan directeur le plan parallèle à deux droites gauches.* Pour deux droites gauches, on peut construire un nombre infini de

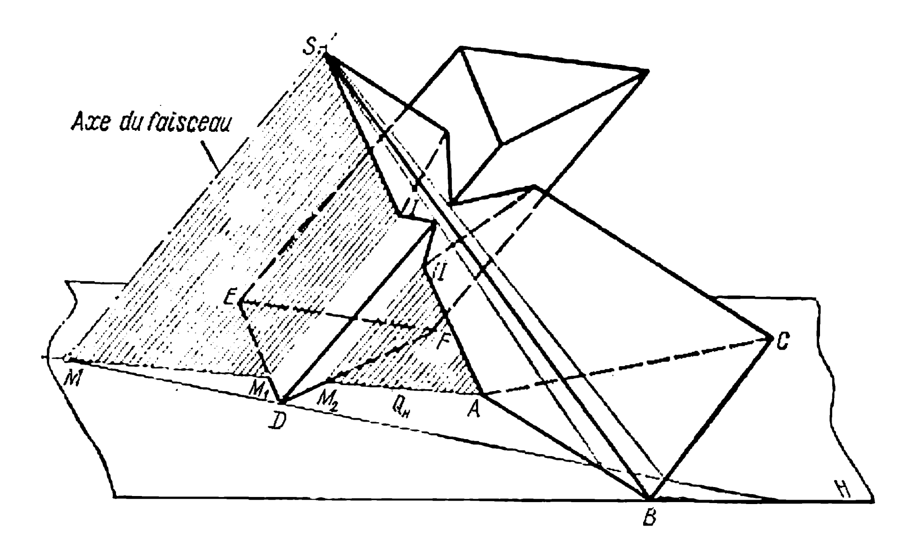


Fig. 197

plans directeurs. Puisque chacun d'eux est déterminé par deux droites concourantes respectivement parallèles aux droites gauches considérées, ils sont tous parallèles entre eux.

Les plans sécants simples de deux prismes sont également parallèles. La direction de leurs traces se trouve généralement en menant par un point quelconque K (fig. 199) les droites KM et KM_0, parallèles aux arêtes des prismes. Ces droites déterminent l'un des plans directeurs Q des arêtes des prismes qui se coupent. Les plans sécants simples doivent être parallèles à Q, alors que leurs traces horizontales sont parallèles à Q_H. Cette dernière est déterminée par les traces horizontales M et M_0 des droites menées par le point K.

Menons les traces des plans limites Q_{1H}, Q_{2H} du prisme I et R_{1H}, R_{3H} du prisme II parallèlement à Q_H. Les secondes traces se trouvant entre les premières, on a une pénétration des polyèdres s'effectuant suivant deux polygones. Les arêtes du prisme I,

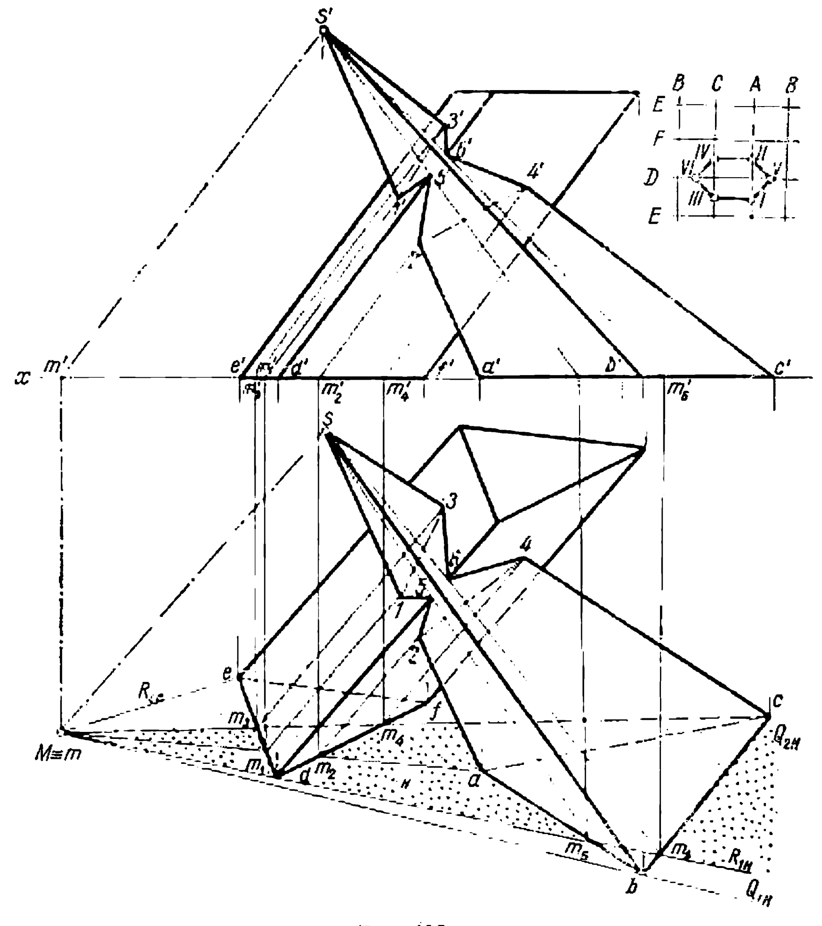


Fig. 198

dont les traces horizontales sont en dehors de la bande limitée par R_{1H} et R_{3H}, ne participent pas à l'intersection. Les points d'entrée et de sortie des arêtes du prisme *II* s'établissent par la méthode usuelle, c'est-à-dire en menant par chacun d'eux un plan sécant simple pour construire les sections du prisme *I* par ces plans. Les points d'intersection des sections planes et des arêtes respectives sont les sommets cherchés des deux polygones.

Notons que les plans R_1 et R_3, limites pour l'un des prismes, sont par rapport au deuxième des plans sécants simples.

Il est aisé de joindre tous les points trouvés, car tous les points pairs sont situés sur la face BC, et les points impairs sur la

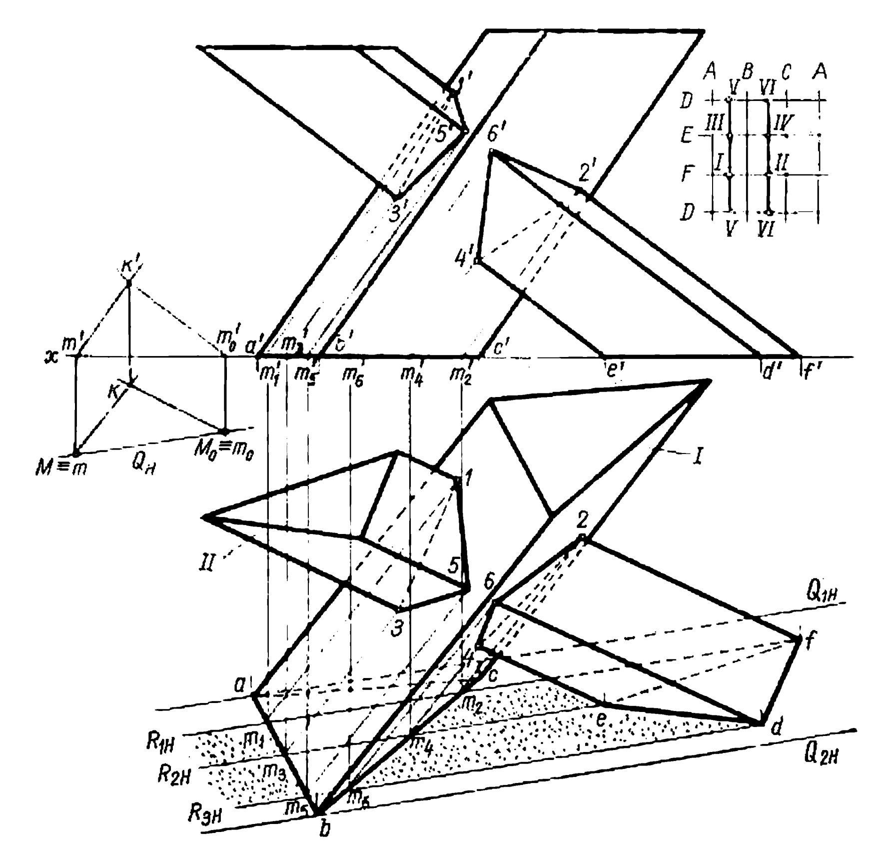


Fig. 199

face AB. En faisant appel au réseau représenté sur le même dessin on obtient le même résultat.

Pour achever l'examen des exemples d'application rationnelle des plans sécants simples à la construction de l'intersection des pyramides et des prismes, notons que *l'usage des plans sécants simples est avantageux lorsque les bases des deux polyèdres se situent dans le même plan.* Si ce plan est un plan quelconque Q, les constructions qui viennent d'être décrites se compliquent quelque peu parce qu'au lieu des traces des plans sécants simples il faut construire sur les plans de projection les lignes d'intersection des plans auxiliaires avec le plan des bases Q.

Considérons à présent la figure 200 qui représente deux polyèdres dont les bases ne reposent pas dans le même plan. Cette fois les

points d'intersection des arêtes de chaque polyèdre avec les faces de l'autre doivent être recherchés à l'aide des plans projetants et non pas des plans sécants simples.

La figure 201 reproduit la pyramide $SABC$ et deux arêtes du prisme DD_1 et FF_1. Par chacune d'elles est mené un plan frontal

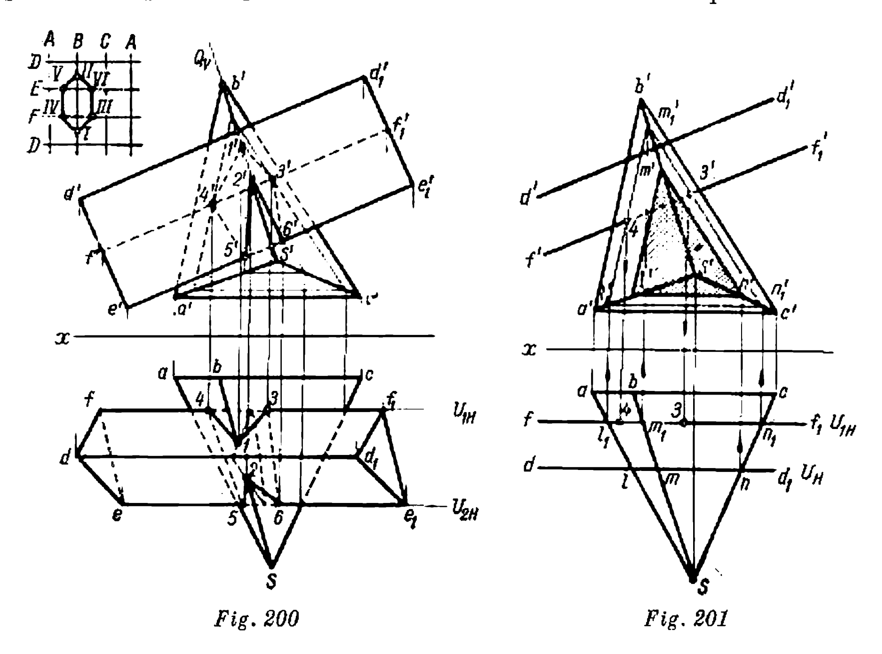


Fig. 200 *Fig. 201*

auxiliaire. Le plan U qui passe par l'arête DD_1 coupe la pyramide suivant le triangle LMN, dont la projection frontale $l'm'n'$ est hachurée.

Le triangle $L_1M_1N_1$ est la section de la pyramide par l'autre plan U_1 mené par FF_1. L'arête DD_1 ne participe pas à l'intersection car sa projection frontale $d'd_1'$ n'a pas de points communs avec la projection de la section plane $l'm'n'$.

La projection frontale du triangle $l_1'm_1'n_1'$ en coupant $f'f_1'$ détermine les projections frontales $3'$ et $4'$ des points d'entrée et de sortie de l'arête FF_1. Ces mêmes constructions pour FF_1 et les autres arêtes sont réalisées sur la figure 200 où un plan auxiliaire U_2 (frontal) est mené par l'arête du prisme EE_1 et un plan projetant de bout Q, par l'arête de la pyramide SB. Sur l'arête EE_1 on trouve les points V et VI, et sur l'arête SB, les points I et II. Il n'est pas nécessaire de mener les plans par les arêtes de la pyramide SA et SC. Ces arêtes ne coupent pas les faces du prisme puisque leurs projections frontales ne coupent pas la projection de même indice du prisme.

Les points obtenus sont joints conformément au réseau représenté sur la figure 200.

En conclusion donnons encore un exemple d'intersection des polyèdres, lorsque les faces de l'un d'entre eux sont perpendiculaires à l'un des plans de projection. Les arêtes du prisme triangulaire représenté sur la figure 202 étant perpendiculaires à *H*, les

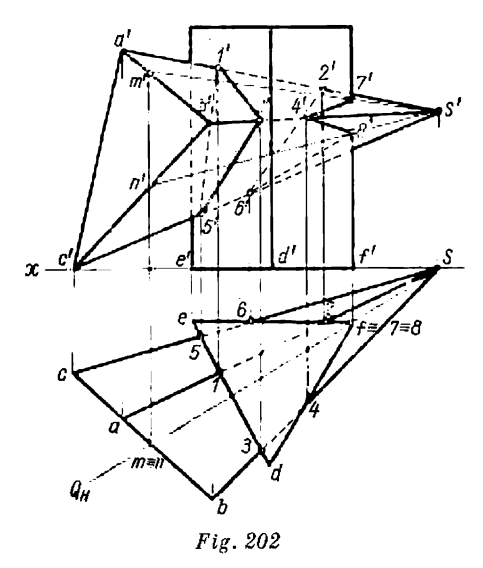


Fig. 202

projections horizontales des points d'intersection des arêtes de la pyramide sont marquées sur l'épure sans recourir à des constructions auxiliaires. Les projections frontales de ces points s'établissent en menant les lignes de rappel. Pour déterminer les points *VII* et *VIII* il n'est besoin de mener le plan auxiliaire *Q* que par une arête du prisme *F*.

CHAPITRE VI

LIGNES COURBES

Un point, une droite et un plan sont des figures géométriques élémentaires dans le sens qu'ils peuvent servir pour former toutes les autres figures de géométrie.

En prenant un point comme figure élémentaire, *on peut considérer une ligne quelconque comme le lieu géométrique des positions successives de ce point en mouvement, comme sa trajectoire. Dans certains cas il est possible de déterminer une ligne comme le lieu géométrique des points qui possèdent une propriété commune.* Une ellipse, par exemple, est définie comme le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points donnés F_1 et F_2 est constante, c'est-à-dire $F_1A + AF_2 =$ const (fig. 203), où A est un point quelconque appartenant à une ellipse.

Si l'on prend la droite pour figure élémentaire, toute ligne peut être alors considérée comme une enveloppe de ses tangentes.

Parfois la famille des droites dont l'enveloppe est une ligne constitue le lieu géométrique des droites qui vérifient des conditions géométriques imposées. La même ellipse, par exemple, peut être définie comme une enveloppe des droites perpendiculaires aux rayons vecteurs d'une circonférence. Ces rayons sont tracés à partir d'un point à l'intérieur de la circonférence, alors que chaque droite de la famille passe par le point extrême du rayon vecteur qui repose sur la circonférence considérée.

La figure 204 représente une circonférence et un point F_1 à l'intérieur d'où l'on mène les rayons vecteurs F_1A, F_1B, F_1C, etc. Les droites passant par les points A, B, C, etc., respectivement perpendiculaires à F_1A, F_1B, F_1C, etc., forment la famille des droites dont l'enveloppe est une ellipse. Les points de contact de l'ellipse et des droites de la famille sont désignés par K_1, K_2, K_3, etc.

Les points d'une ligne courbe peuvent être définis également d'après la loi de leur déplacement.

En mécanique les équations du mouvement d'un point repéré par rapport à un système de référence s'écrivent sous la forme paramétrique:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

En donnant au paramètre t (temps) des valeurs différentes, on détermine les coordonnées du point en mouvement et on trouve ainsi sa position dans l'espace.

Le lieu géométrique de tous ces points forme une certaine ligne dont les équations paramétriques sont les équations du mouvement du point.

En géométrie analytique il existe également d'autres modes de détermination des courbes.

Mais toutes les lignes ne se prêtent pas à interprétation analytique. On recourt alors à leur détermination graphique.

Une courbe susceptible d'être exprimée sous forme analytique et dont la génération vérifie certaines conditions géométriques peut être aussi déterminée graphiquement.

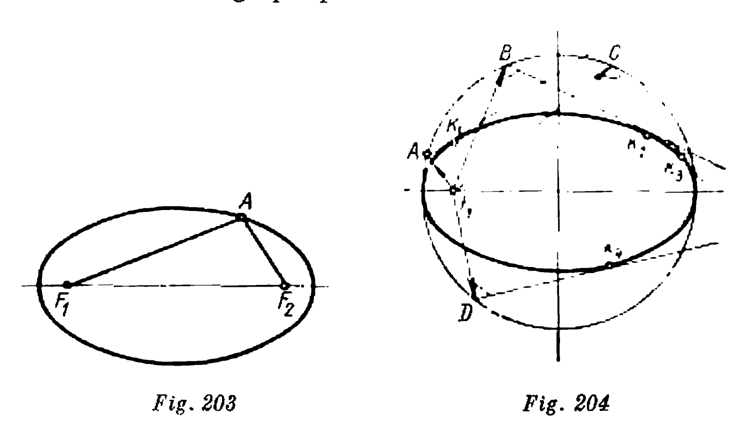


Fig. 203 *Fig. 204*

En géométrie descriptive les courbes sont étudiées d'après leurs projections. La construction des projections d'une ligne dépend essentiellement de ce que tous les points de la courbe considérée appartiennent ou non à un plan. Si tous les points de la courbe se situent dans un même plan, on dit qu'elle est *plane*. Telles sont la circonférence, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole, la cycloïde, etc.

Une courbe dont tous les points ne sont pas contenus dans le même plan est dite *gauche* ou de l'espace.

Un exemple de telles courbes est donné par les lignes hélicoïdales, ou hélices, très employées en technique.

Indiquons certaines propriétés des projections des courbes planes et gauches.

Si un point A appartient à une courbe MN (fig. 205) la projection a de ce point appartient à la projection mn de la courbe.

Une sécante [1] et une tangente à une courbe se projettent respectivement sous la forme de sécante et de tangente à la projection de la courbe.

Soit la sécante AB (fig. 205) menée par le point A de la courbe MN. La projection de la sécante est déterminée par les points a et b qui appartiennent à la projection mn de la courbe considérée. La

[1] On appelle sécante une droite qui coupe la courbe en un ou plusieurs points.

droite *ab* qui coupe la projection de la courbe est sécante par rapport à *mn*.

La tangente *AC* peut être considérée comme une position limite de la sécante lors du rapprochement des points d'intersection *A*

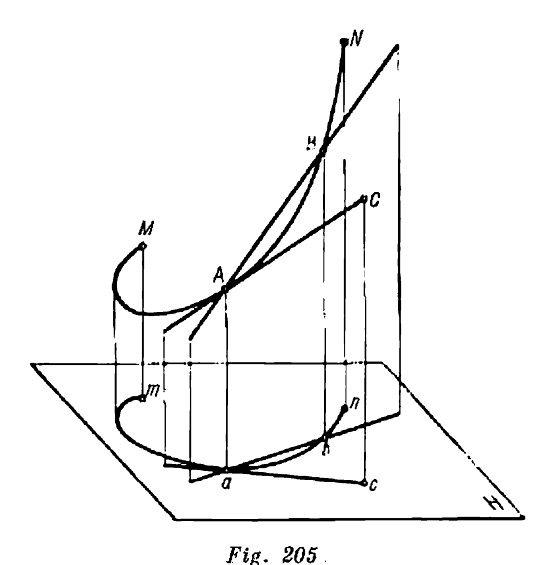


Fig. 205

et *B* jusqu'ils se confondent en un point *A*. Dans ce cas, leurs projections coïncident également, c'est-à-dire la projection de la sécante se transforme en tangente *ac* à la projection *mn* de la courbe.

§ 38. Projections des courbes planes

Lors de la construction des projections d'une courbe plane il faut indiquer ses points figuratifs, c'est-à-dire ses points singuliers et les points les plus éloignés et les plus proches des plans de projection.

On appelle point *ordinaire* d'une courbe le point *M* (fig. 206) qu'on peut enfermer dans un rectangle (ne serait-ce que très petit) tel que la partie de la courbe contenue dans ce rectangle soit un *segment simple* [1]. Tous les autres points s'appellent *singuliers* (*A* et *B* sur la fig. 206).

---

[1] On appelle *segment simple* d'une courbe le lieu géométrique des points dont les coordonnées dans un système cartésien vérifient l'équation $y = f(x)$ lorsque $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, x_1 et x_2 étant deux valeurs fixes et $f(x)$ supposée univoque, continue t différentiable un nombre suffisant de fois.

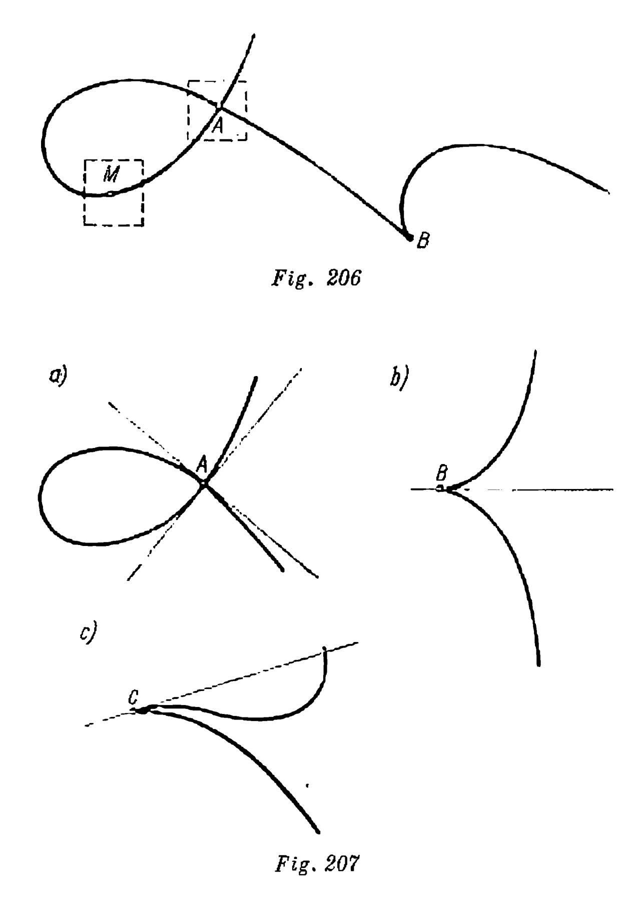


Fig. 206

Fig. 207

La figure 207 représente certains points singuliers des courbes: 1) *point nodal A* ou point d'intersection de la courbe par elle-même (fig. 207, *a*), où il existe deux tangentes différentes à la courbe; 2) *point de rebroussement de première espèce B* (fig. 207, *b*) qui détermine le contact de deux branches de la courbe ayant en ce point une tangente commune et situées de part et d'autre de cette dernière; 3) *point de rebroussement de deuxième espèce C* (fig. 207, *c*) qui détermine le contact de deux branches de la courbe ayant en *C* une tangente commune située (au voisinage de *C*) d'un seul côté des deux branches.

La figure 208 présente la construction de la projection horizontale d'une courbe qui repose dans un plan *Q* déterminé par ses traces Q_V et Q_H. La projection frontale de la courbe est donnée également.

La construction est établie en se guidant par la solution du problème décrit au § 18 (détermination de la projection horizontale a du point A appartenant au plan donné d'après la projection frontale a' de ce point).

Ainsi, supposons une horizontale AN menée dans le plan Q par le point A de la courbe considérée. La projection frontale $a'n'$ doit passer par la projection donnée de même indice du point a'. La

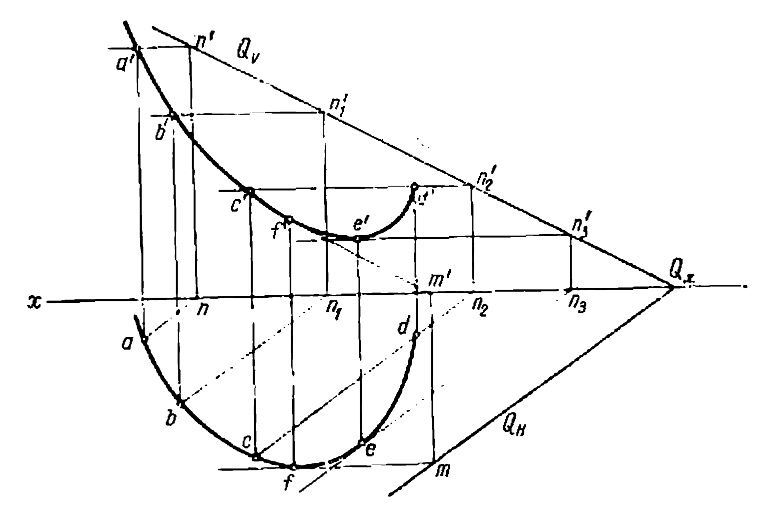


Fig. 208

deuxième projection de cette horizontale passe par la projection horizontale de sa trace frontale (point n) parallèlement à Q_H.

La ligne de rappel permet de déterminer la projection horizontale cherchée a du point A. Les projections horizontales des points B, C, D et E sont établies d'une façon analogue. Notons que le point E est le point le plus bas de la courbe. Sa projection horizontale s'obtient à l'aide de l'horizontale EN_3, tangente à la courbe donnée.

La tangente FM tracée parallèlement à la trace frontale du plan Q_V détermine le point F le plus éloigné du plan de projection V.

Considérons encore la construction des projections d'une autre courbe plane, celle d'une circonférence située dans un plan quelconque Q et ayant pour centre Ω (ω, ω') et pour rayon R (fig. 209).

Les projections orthogonales de la circonférence sont des ellipses ; dans ces conditions, le grand axe de chaque ellipse correspond à la projection du diamètre de la circonférence parallèle au plan de projection correspondant. Tous les autres diamètres se projettent

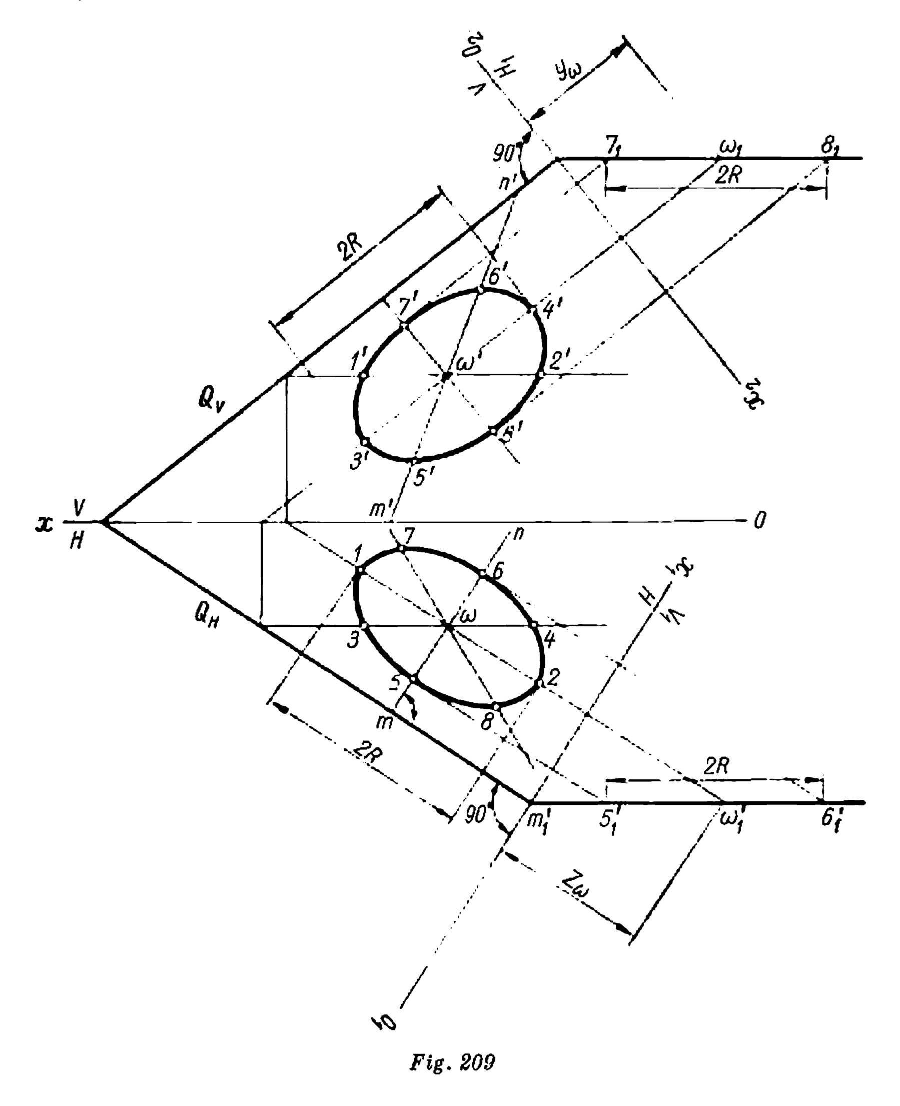


Fig. 209

en raccourci. Donc, les projections des diamètres de la circonférence confondus avec l'horizontale et la frontale du plan Q sont les grands axes des ellipses, projections horizontale et frontale respectives de la circonférence.

Sur la figure 209 le segment *1—2* égal à $2R$ est le grand axe de la projection horizontale de la circonférence, et le segment *3'—4'* égal à $2R$ est le grand axe de la projection frontale.

Pour ce qui est des petits axes, on les obtient en projetant sur les plans H et V les diamètres de la circonférence perpendiculaires (dans l'espace) respectivement à l'horizontale et à la frontale du plan Q. Il en est ainsi parce que d'après le théorème sur la projection d'un angle droit, il n'y a que les projections des deux diamètres indiqués qui forment un angle de 90° avec les grands axes des ellipses.

La construction du petit axe *5—6* dans la projection horizontale de la circonférence représente la solution du problème qui consiste à reporter sur la droite donnée MN à partir du point Ω un segment égal à R.

Dans le cas considéré, la droite MN est la ligne de plus grande pente du plan Q menée par le point Ω. Les points *5* et *6* placés à la distance R de Ω doivent se trouver sur cette droite. La solution du problème s'obtient par changement de plans de projection.

On trouve d'une manière analogue les points *7*; *7'* et *8*; *8'* qui déterminent le petit axe de l'ellipse sur la projection frontale de la circonférence.

§ 39. Lignes hélicoïdales

1. Hélice cylindrique. *C'est une courbe engendrée par un point qui se déplace suivant une génératrice quelconque d'un cylindre régulier en rotation autour de son axe et telle que la trajectoire parcourue par le point sur la génératrice est toujours proportionnelle à l'angle de rotation du cylindre.*

Le déplacement du point le long de la génératrice pendant que le cylindre fait un tour est dit *pas* de l'hélice cylindrique. On distingue l'hélice *à droite* (fig. 210, *a*) et *à gauche* (fig. 210, *b*).

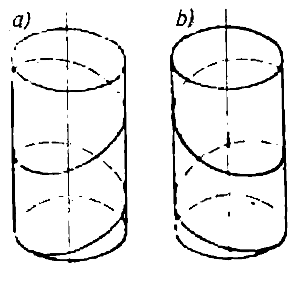


Fig. 210

La construction des projections de l'hélice cylindrique est donnée sur la figure 211. Les données de départ sont: R, le rayon du cylindre; h, le pas de l'hélice; la direction de l'hélice, à droite dans le cas considéré.

Le déplacement angulaire d'un point suivant une trajectoire hélicoïdale cylindrique étant proportionnel à son déplacement linéaire, lors d'une rotation de $360°/n$ le point se déplace parallèlement à l'axe du cylindre de $1/n$ du pas. Dans le cas de la figure 211 $n = 12$, et c'est pourquoi la circonférence, projection horizontale du cylindre, et sa hauteur, égale au pas h, sont divisées en 12 parties égales.

La projection frontale de chaque point, *2'* par exemple, est déplacée le long de l'axe du cylindre de 1/12 du pas h par rapport

au point précédent *1'* ; de plus, cette projection se situe sur la même ligne de rappel que sa projection horizontale respective, le point *2*.

La projection frontale d'une hélice représente une sinusoïde déformée, car le principe de sa construction est le même que pour une sinusoïde.

Le développement d'une hélice sur un plan transforme l'hélice en une droite. Il en est ainsi parce que les déplacements linéaire

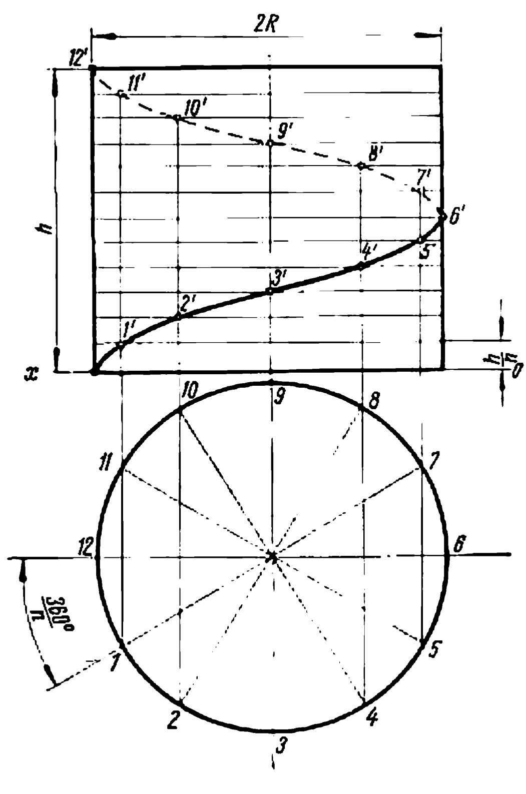


Fig. 211

et angulaire du point sont liés en raison directe. L'hélice est donc une géodésique [1] de la surface cylindrique.

Considérant le développement d'un cylindre sur lequel est tracée une hélice (fig. 212), on peut établir une relation entre le rayon du cylindre R, le pas h et l'angle d'hélice α: $h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha$.

[1] On appelle géodésique la plus courte des lignes qui joignent deux points donnés sur une surface.

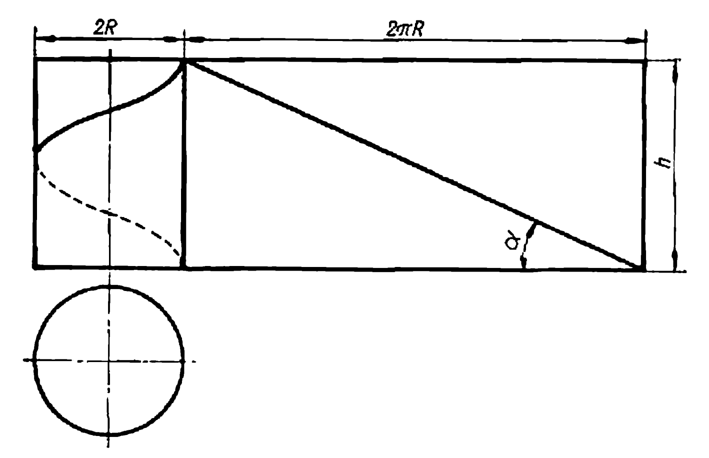


Fig. 212

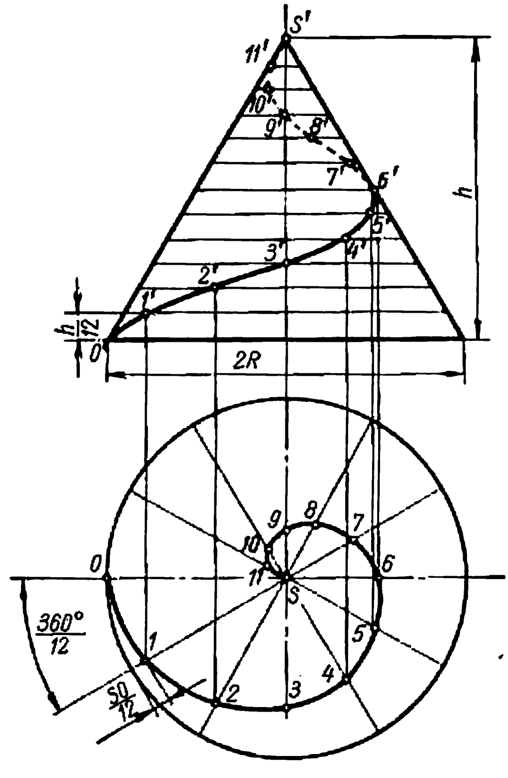


Fig. 213

2. Hélice conique. *C'est une courbe engendrée par un point qui se déplace suivant une génératrice quelconque d'un cône régulier en rotation autour de son axe et telle que la trajectoire du point suivant la génératrice est toujours proportionnelle à l'angle de rotation du cône.*

La projection sur l'axe du cône du déplacement d'un point le long de la génératrice en un tour est dite *pas* de l'hélice conique.

La construction de la projection horizontale d'une hélice conique (fig. 213) se distingue par le fait que la projection horizontale d'un point animé d'un mouvement est déterminée compte tenu de deux composantes de ce mouvement, de la révolution avec la génératrice et de la translation le long de cette dernière.

Ainsi, pour effectuer la construction du point *1*, la projection horizontale de la génératrice du cône *SO* a été tournée dans le plan de 360°/12, et le point *O* déplacé le long de la génératrice de 1/12 de la longueur de *SO*. Les autres points sont construits dans le même ordre.

La projection horizontale d'une hélice conique est une spirale d'Archimède. La projection frontale de chaque point de l'hélice est déterminée par l'intersection des lignes de rappel et des projections frontales des parallèles [1] du cône, situées dans des plans déplacés l'un par rapport à l'autre de $h/12$.

---

[1] On appelle parallèles d'une surface de cône les circonférences résultant de la section du cône par des plans perpendiculaires à son axe.

CHAPITRE VII

SURFACES COURBES

En géométrie analytique, une surface définie par une équation donnée dans un système de coordonnées courant est considérée comme le lieu géométrique des points dont les coordonnées vérifient l'équation:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Pour représenter une surface, il est plus commode de la considérer comme un lieu géométrique non pas de points mais de lignes susceptibles de vérifier certaines conditions. Ces lignes qui peuvent être droites ou courbes s'appellent *génératrices.* Pour construire la projection d'une surface, en plus du type de la génératrice, il faut connaître le mode de son déplacement.

Une même surface peut être générée par des procédés différents. Ainsi, la surface d'un cône de révolution peut être engendrée par la rotation d'une génératrice rectiligne autour d'un axe concourant avec elle ou par la translation d'une circonférence subissant une déformation continue dont le centre se déplace suivant l'axe du cône et le plan est perpendiculaire à cet axe. De la multitude des modes éventuels de génération d'une surface, il faut dégager ceux qui combinent une forme simple de génératrice à une cinématique peu compliquée de son mouvement.

Selon le type de génératrice on distingue les surfaces *réglées* et *non réglées. Les premières ont pour génératrice une ligne droite, et les deuxièmes, une courbe.* Les surfaces réglées se subdivisent elles-mêmes en surfaces *développables,* c'est-à-dire celles qui peuvent s'étendre sur un plan sans déchirure ni repli et en surfaces *non développables* ou *gauches.*

Si on les classe suivant le mode de déplacement de leur génératrice, la majorité des surfaces peuvent être divisées en 1) *surfaces de révolution*; 2) *surfaces hélicoïdales* et 3) *surfaces à plan directeur.*

Une place particulière revient aux surfaces courbes dont la génération ne vérifie aucune loi cinématique. La forme optimale de ces surfaces est déterminée par les conditions physiques d'emploi des pièces et établie par l'expérience. A titre d'exemple on peut citer les surfaces des ailettes des turbines et des machines soufflantes, des revêtements des armatures des bateaux de mer, des avions et des voitures automobiles. Ces surfaces sont étudiées dans des cours spéciaux en fonction de l'établissement de leur gamme de fabrication.

Dans ce qui suit nous examinerons les surfaces de révolution, les surfaces développables, hélicoïdales et à plan directeur.

40. Surfaces de révolution

Une surface de révolution est engendrée par la rotation d'une génératrice rectiligne ou courbe autour d'un axe fixe.

La figure 214 représente la surface engendrée par la rotation autour de l'axe II_1 de la courbe ABC située dans le plan qui passe par l'axe.

Lors de la rotation de la génératrice chacun de ses points décrit une trajectoire circulaire dans un plan perpendiculaire à l'axe de la surface; ces circonférences s'appellent parallèles, comme nous l'avons dit dans ce qui précède. Le plus petit parallèle est dit *cercle de gorge*.

La loi de génération des surfaces de révolution permet de déduire deux de leurs propriétés:

1) un plan perpendiculaire à l'axe de rotation coupe la surface suivant une circonférence qui est un parallèle;

2) un plan qui passe par l'axe de rotation coupe la surface suivant deux lignes symétriques par rapport à l'axe, dites *méridiens*.

Sur le dessin l'axe d'une surface de révolution est généralement placé perpendiculairement à l'un des plans de projection. Ainsi sur la figure 215, l'axe $II_1 \perp H$.

Dans ce cas tous les parallèles se projettent sur le plan H en vraie grandeur, de même que sur le plan V les deux méridiens qui déterminent le contour frontal de la surface. Le méridien situé dans le plan parallèle à V est dit principal.

Pour trouver la projection horizontale d'un point quelconque M appartenant à la surface de révolution, on mène par m' la projection frontale du parallèle. Après avoir construit la projection de ce parallèle sur le plan H, on détermine m. La figure 215 montre le point M vu devant.

Considérons les surfaces de révolution à génératrices courbes les plus usitées.

1. Une *sphère* est engendrée par la rotation d'une circonférence autour de son diamètre.

2. Un *tore* est constitué par un cercle qui tourne autour d'un axe situé dans son plan mais ne passant pas par son centre. On appelle souvent anneau le tore dont l'axe ne coupe pas le cercle (fig. 216). Les projections orthogonales du tore sont représentées sur la figure 217.

3. Un *toroïde* est formé par un arc de cercle dont le plan dans le cas général peut ne pas coïncider avec l'axe de rotation (fig. 218).

En construction mécanique on donne la forme de toroïdes aux ébauches de vis sans fin et de roue de transmission toroïdale (fig. 219), laquelle présente par rapport à la transmission par vis sans fin

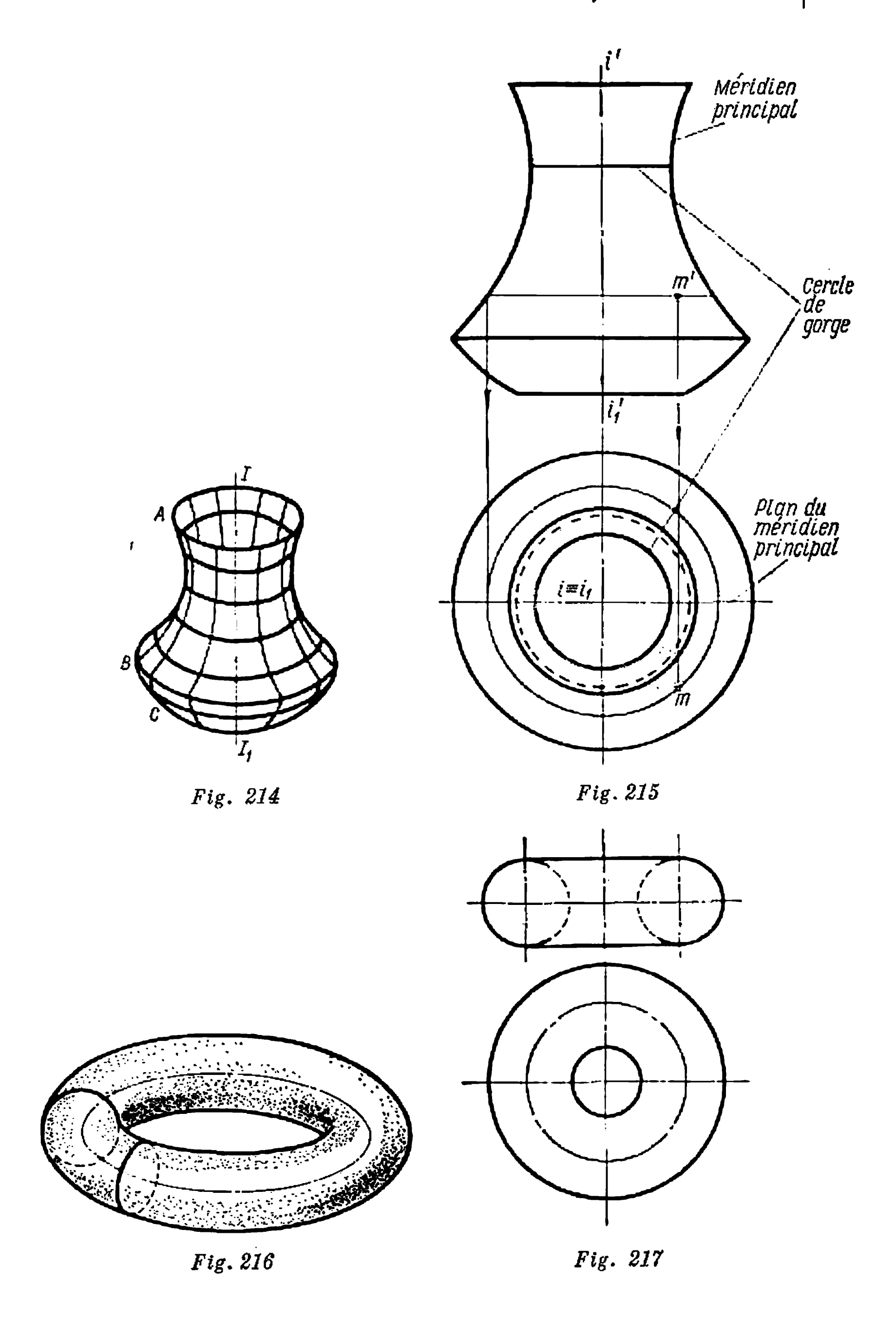


Fig. 214

Fig. 215

Fig. 216

Fig. 217

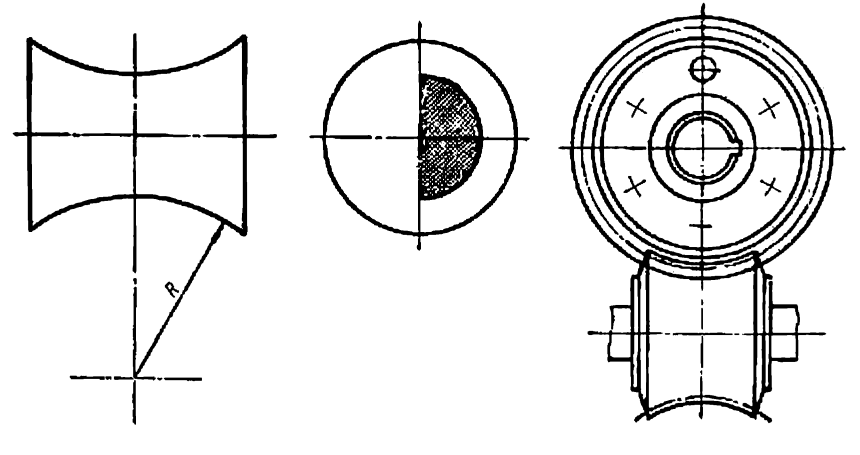


Fig. 218

Fig. 219

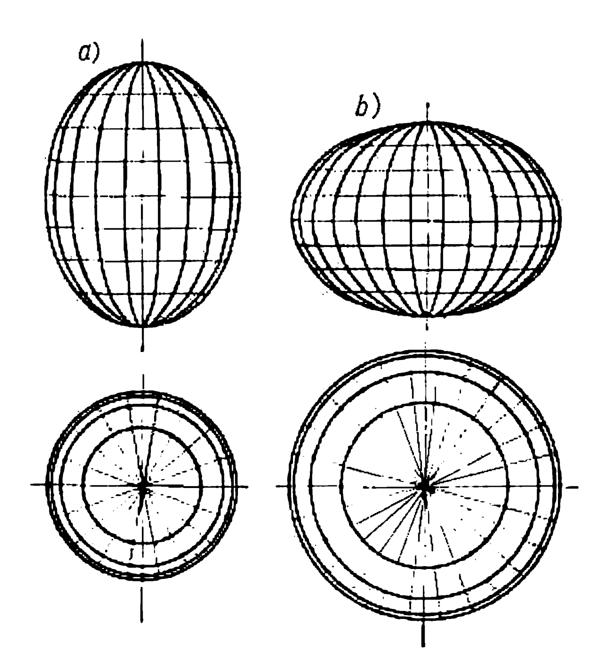


Fig. 220

cylindrique des avantages importants (rendement élevé et faible encombrement).

4. Un *ellipsoïde de révolution* est produit par la rotation d'une ellipse autour de l'un de ses axes, le grand ou le petit. Si l'axe de

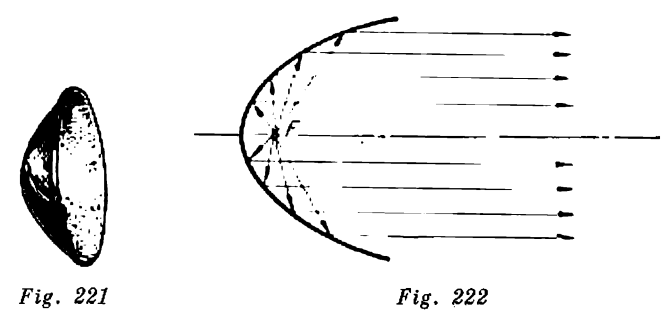


Fig. 221 *Fig. 222*

rotation correspond au grand axe de l'ellipse, l'ellipsoïde de révolution est dit allongé (fig. 220, *a*), s'il correspond au petit axe, l'ellipsoïde est dit aplati ou sphéroïde (fig. 220, *b*). Le globe terrestre s'apparente par sa forme au sphéroïde.

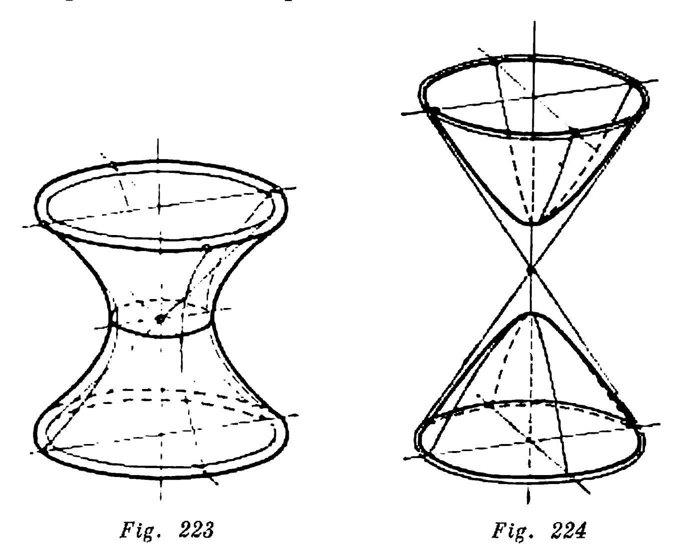


Fig. 223 *Fig. 224*

5. Un *paraboloïde de révolution* est engendré par la rotation d'une parabole autour de son axe.

On emploie les surfaces paraboliques de révolution dans la fabrication des miroirs des projecteurs (fig. 221) et des phares d'automobiles pour mettre à profit les propriétés du foyer de la

de la parabole: si une source de lumière est placée au foyer d'une parabole, les rayons reflétés par la parabole sont parallèles entre eux (fig. 222). C'est également sur ce principe que sont construits les sonars (radars acoustiques) et les radiotélescopes. La coupole du planétarium de Moscou présente extérieurement une forme parabolique.

6. Un *hyperboloïde de révolution* peut être à une ou à deux nappes. Le premier s'obtient par rotation d'une hyperbole autour d'un axe imaginaire (fig. 223), et le deuxième, autour d'un axe réel (fig. 224).

Comme nous allons le montrer, la surface d'un hyperboloïde à une nappe peut également être engendrée par la rotation d'une droite. C'est une surface à double génération, c'est-à-dire par chaque point d'un hyperboloïde à une nappe passent deux et seulement deux de ses génératrices rectilignes.

§ 41. Propriétés d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et application dans la construction

Considérons un hyperboloïde de révolution à une nappe qui est une surface réglée courante.

Soient deux droites gauches (fig. 225) AB et II_1, dont la première est la génératrice de la surface de révolution, et la deuxième son axe. Lors de la rotation de la droite AB autour de l'axe II_1, chaque point de la génératrice se déplace suivant une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe II_1.

Il est clair que l'un des parallèles est un cercle de rayon minimum r_0 égal à la distance minimale entre les droites données (segment OM). Il est d'usage de l'appeler *cercle de gorge* de la surface. Montrons que le méridien d'une telle surface est une hyperbole, c'est-à-dire que la surface elle-même est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Théorème 1. *Le méridien de la surface engendrée par la rotation d'une des droites gauches autour de l'autre est une hyperbole.*

Pour déterminer l'équation du méridien, choisissons un système de coordonnées fixe Oxz tel que son origine se confonde avec le centre du cercle de gorge, et l'axe Oz avec l'axe de l'hyperboloïde II_1 (voir fig. 225).

Soit une génératrice rectiligne qui perce le plan des axes de coordonnées en N, point appartenant à la section méridienne.

Pour établir une relation entre les coordonnées x et z du point N, considérons le triangle rectangle OMn ($OM \perp Mn$), où

$$On^2 = OM^2 + Mn^2.$$

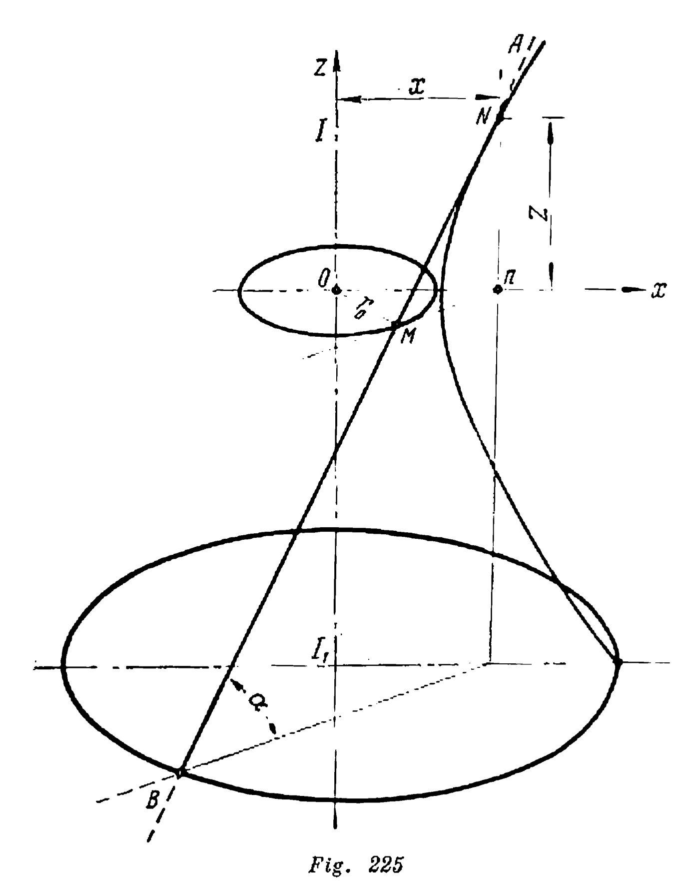


Fig. 225

Puisque On est l'abscisse du point N, le segment OM est le rayon r_0 du cercle de gorge et $Mn = \frac{z}{\operatorname{tg}\alpha}$, il vient:

$$x^2 = r_0^2 + \frac{z^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

et en définitive

$$\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{z^2}{r_0^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1,$$

où α est l'angle compris entre la génératrice AB et le plan perpendiculaire à l'axe de rotation; z, la cote du point N.

Ainsi nous obtenons une équation de la forme:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

qui est l'équation d'une hyperbole.

Un hyperboloïde de révolution à une nappe peut être considéré comme le cas général d'une surface réglée qui dégénère dans des cas particuliers en surface conique ou cylindrique.

Ainsi, la surface d'un hyperboloïde de révolution dégénère en cône si $r_0 = 0$ et $\alpha \neq 0°$, en cylindre si $r_0 \neq 0$ et $\alpha = 90°$, en plan comportant un trou si $r_0 \neq 0$ et $\alpha = 0°$ et en droite si $r_0 = 0$ et $\alpha = 90°$.

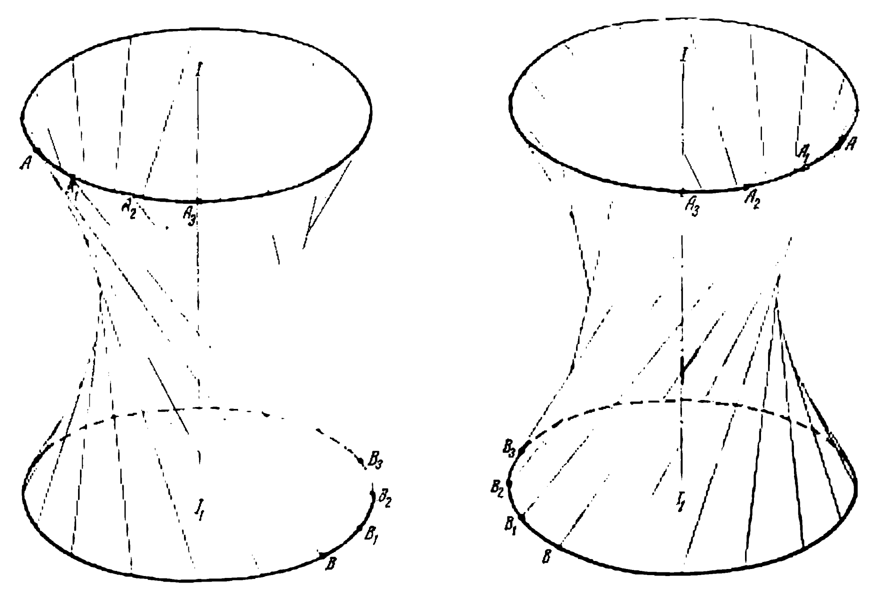


Fig. 226

Considérons certaines propriétés d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

La droite AB (fig. 226) en tournant autour de l'axe II_1 occupe une série de positions successives A_1B_1, A_2B_2, etc., qui forment un système de génératrices rectilignes.

On peut démontrer que la surface d'un hyperboloïde de révolution compte non pas un, mais deux systèmes de génératrices rectilignes.

Théorème 2. *Par chaque point d'un hyperboloïde de révolution à une nappe passent deux et seulement deux de ses génératrices rectilignes.*

En effet, soit le point M (fig. 227) de la surface d'un hyperboloïde à une nappe dont l'axe est la droite II_1, et la génératrice la droite AB. La position de AB du premier système de génératrices est déterminée par le point M, la distance de la droite à l'axe II_1, égale à r_0, et l'angle α que la droite AB forme avec le plan per-

pendiculaire à II_1. Mais une autre droite, CD, satisfait également à ces conditions.

Chaque couple de points appartenant aux droites AB et CD contenus dans le même plan perpendiculaire à II_1, les points K et K_1

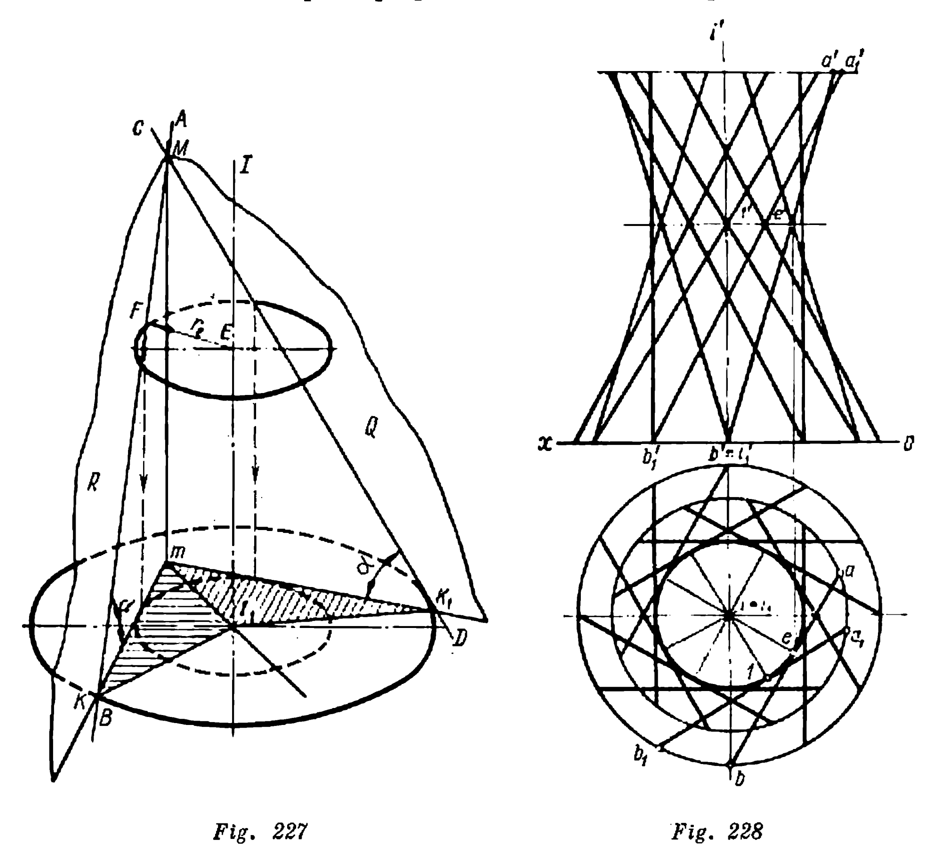
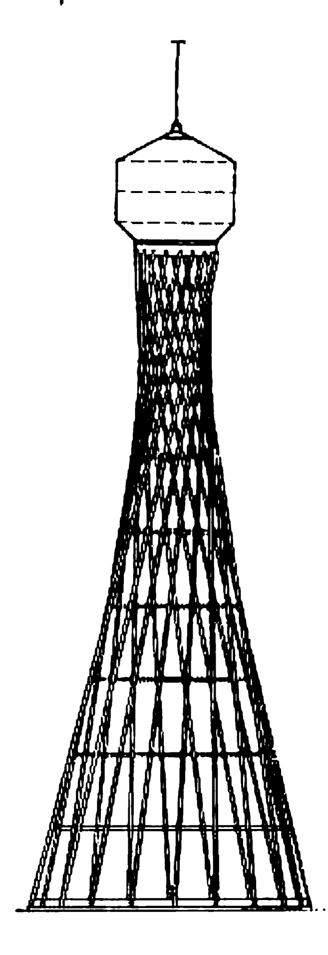


Fig. 227

Fig. 228

par exemple, se trouvent à la même distance de l'axe, comme il découle de l'égalité des triangles KI_1m et K_1I_1m. On en déduit que lors de la rotation des droites AB et CD, les deux points se déplacent suivant la même circonférence (parallèle). La droite CD en tournant autour de l'axe II_1 engendre la même surface d'hyperboloïde de révolution à une nappe que la droite AB. La série de positions successives prises par la droite CD constitue le deuxième système de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde.

Chaque génératrice d'un système coupe toutes les génératrices de l'autre, à l'exception d'une seule qui lui est parallèle.



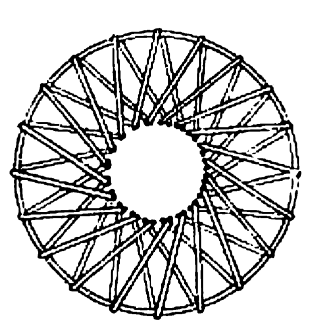


Fig. 229

Toutes les génératrices rectilignes d'un système sont des droites gauches.

Ces propriétés des génératrices d'un hyperboloïde sont démontrées en géométrie analytique.

La construction des projections d'un hyperboloïde de révolution à une nappe est donnée sur la figure 228. Soit l'axe de rotation constitué par la droite II_1 perpendiculaire au plan H. Lors de la rotation de la génératrice AB autour de l'axe II_1 chaque point de la droite se déplace dans l'espace suivant une circonférence (parallèle) dont le plan est perpendiculaire à l'axe II_1. Cette circonférence se projette ainsi sur le plan H en vraie grandeur, et sur le plan V en une droite parallèle à l'axe Ox. Le point E de la génératrice le plus proche de l'axe de rotation décrit une circonférence de rayon minimum, le cercle de gorge. Les projections horizontales de toutes les génératrices étant tangentes à la projection du cercle de gorge, les positions successives de la génératrice rectiligne peuvent être représentées en traçant les tangentes à la projection du cercle de gorge. Sur la figure 228 ce cercle est divisé en douze parties égales. La tangente a_1b_1 menée par le point 1 de sa projection est la projection horizontale de la génératrice tournée de 30°. La projection frontale de cette dernière est déterminée par les points a_1' et b_1' dont chacun est situé dans le plan de son parallèle. Toutes les autres génératrices sont construites d'une manière analogue.

L'idée de tirer profit de l'hyperboloïde de révolution à une nappe dans l'industrie du bâtiment et les ouvrages d'art appartient à l'éminent ingénieur russe V. Choukhov (1853-1939).

En 1896 V. Choukhov a construit une tour ajourée à carcasse de barreaux rectilignes mis en place suivant des

génératrices d'un corps de révolution et reliés aux points d'intersection par des anneaux horizontaux (fig. 229).

L'aptitude à la construction de l'ouvrage n'imposait ni cintrage, ni profilage des éléments, se combinait heureusement à une forme architecturale élégante, une résistance appropriée, la stabilité et l'économie de métal. Tous ces avantages ont déterminé en son temps une large extension de cette forme pour la construction de pylônes d'antenne, de phares, de château d'eau, de pylônes des lignes de transmission d'énergie électrique.

§ 42. Surfaces développables

On appelle développable une surface réglée susceptible d'être étendue sur un plan sans déchirure ni repli. Pour qu'une surface

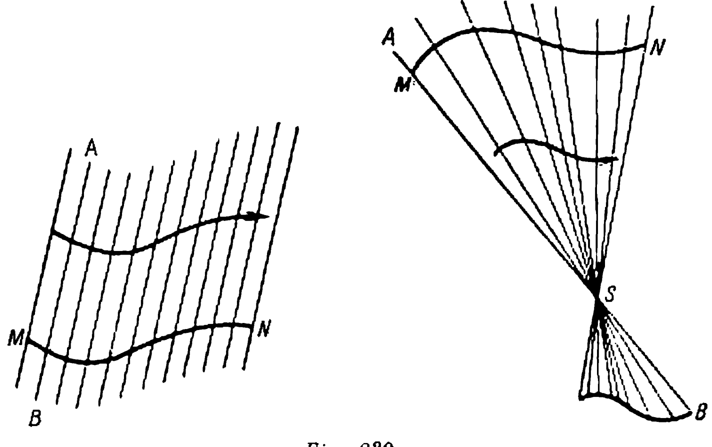


Fig. 230

soit développable, il est nécessaire mais non suffisant qu'elle soit réglée.

La géométrie différentielle démontre que toute surface développable est une surface cylindrique, ou conique, ou encore qu'elle est le lieu géométrique des tangentes à une certaine courbe.

La construction des surfaces cylindriques et coniques a été déjà étudiée dans ce qui précède lors de l'étude de la génération des surfaces prismatiques et pyramidales.

La figure 230 donne une idée des modes de formation des surfaces cylindriques et coniques. La génératrice AB de la première surface se déplace suivant la directrice MN en restant parallèle à elle-même, alors que la génératrice de la deuxième surface se déplace suivant la directrice et passe par le point fixé S.

La figure 231 représente une surface qui est le lieu géométrique des tangentes à une courbe de l'espace MN.

La courbe MN est dite *arête de rebroussement*. Lorsque le point de contact de la génératrice rectiligne se déplace suivant l'arête de rebroussement, sa tangente engendre une surface développable. La demi-tangente située d'un côté du point de contact forme une

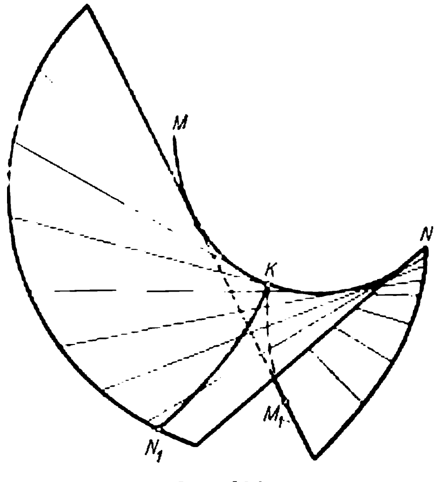


Fig. 231

nappe, et l'autre demi-tangente en forme une autre. Ainsi, l'arête de rebroussement divise la surface en deux nappes.

L'intelligence immédiate de la structure originale de la surface au voisinage de l'arête de rebroussement est obtenue en la coupant par les plans perpendiculaires à la génératrice et passant par le point de contact de la génératrice considérée.

La figure 231 représente une telle section (courbe du type M_1KN_1) qui a en K un point de rebroussement. C'est le point de rencontre des branches M_1K et N_1K de la courbe. Les points de l'arête de rebroussement sont pour une surface développable des points singuliers.

Les projections d'une surface à arête de rebroussement sont représentées sur la figure 232. L'arête de rebroussement est constituée sur cette figure par la courbe MN à laquelle sont menées les tangentes MM_1, AA_1, EF, BB_1 et NN_1. Un plan Q perpendiculaire à EF est mené par le point de contact K de la droite EF et de l'arête de rebroussement. Puisque la droite est horizontale, le plan Q est le plan projetant vertical. La figure 232 montre les projections des points M_1, A_1, K, B_1 et N_1 d'intersection des génératrices rectilignes avec le plan Q.

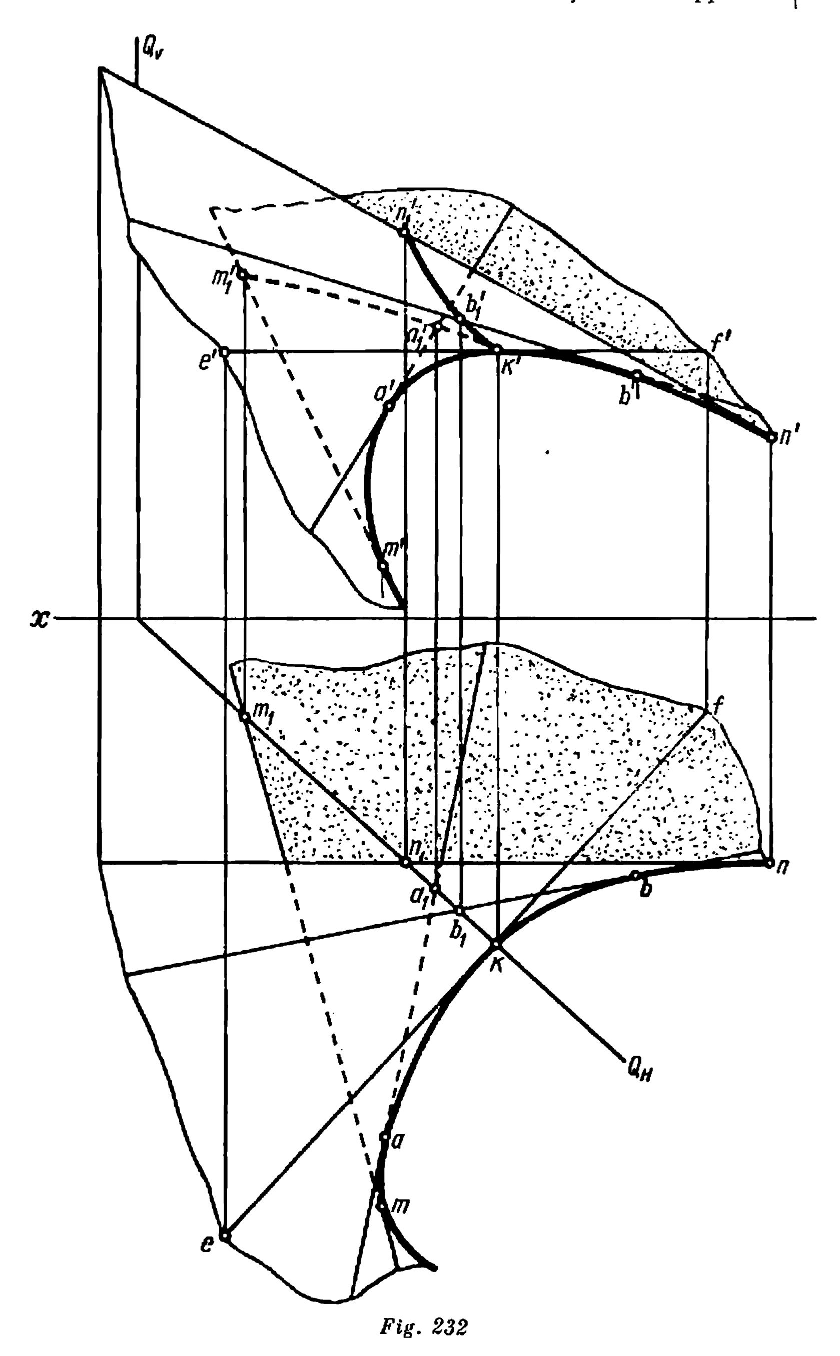


Fig. 232

Le lieu géométrique de ces points est la section de la surface par le plan Q. Le point K est le point singulier de la courbe.

Dans le cas considéré, l'idée de la structure de la surface est suggérée par la projection frontale de la section $m'_1 - a'_1 - k' - b'_1 - n'_1$.

Les surfaces développables ont une propriété précieuse qui détermine l'aptitude à la fabrication des pièces qu'elles forment: on peut

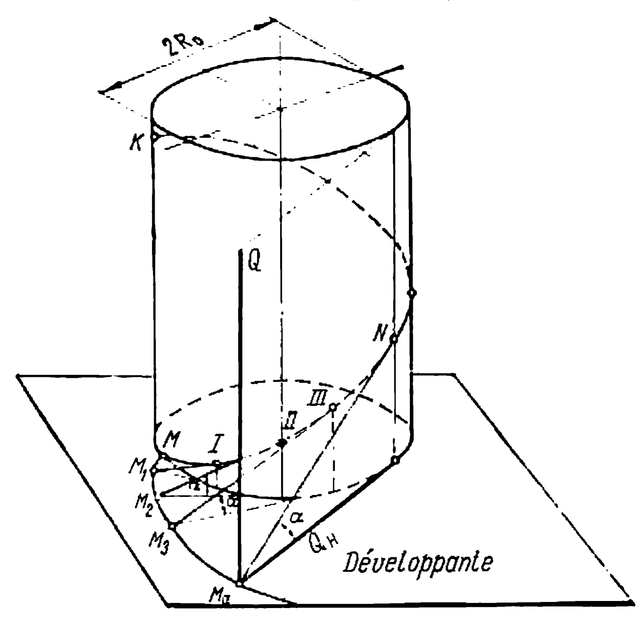


Fig. 233

les usiner avec un outil plat dont le mouvement n'est fonction que d'un seul paramètre.

Indiquons comme type important de surfaces développables, celles dont l'*arête de rebroussement est une hélice cylindrique*. L'intérêt que présentent ces surfaces est dû non seulement à leurs propriétés géométriques particulières, mais encore aux applications qu'elles trouvent en technique.

Ainsi, soit l'arête de rebroussement constituée par l'hélice cylindrique MNK représentée sur la figure 233.

La même figure montre également les tangentes à l'hélice M_1I, M_2II, M_3III, . . ., dont le lieu géométrique engendre la surface développable.

Il est aisé de démontrer que chaque tangente forme avec le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre un angle α égal à l'angle d'hélice.

En effet, considérons le développement de la surface du cylindre sur un plan Q qui reste toujours tangent au cylindre. La ligne hélicoïdale se transforme en une droite qui se confond successivement avec toutes les tangentes à l'hélice.

On en déduit que toutes les tangentes à l'arête de rebroussement forment avec le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre un angle constant égal à la pente de la droite que devient l'hélice par suite du développement. Or, cet angle est égal justement à l'angle d'hélice sur le cylindre.

Les surfaces dont toutes les génératrices rectilignes composent avec une certaine surface un même angle sont dites *surfaces d'égale pente.*

La surface développable considérée constitue précisément un cas particulier de telles surfaces.

Lorsqu'une surface, dont l'arête de rebroussement est une hélice cylindrique, est coupée par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, on obtient dans la section une développante dont la développée [1] est une circonférence, projection orthogonale de l'arête de rebroussement sur ce même plan.

On le vérifie par le fait que dans la génération d'une surface, lorsqu'une droite se déplace dans l'espace tout en restant tangente à l'hélice cylindrique, la projection de cette tangente sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre roule sans glisser sur la circonférence qui est la projection de l'arête de rebroussement sur ce plan. Or, chaque point d'une droite qui se déplace de cette façon selon une circonférence décrit une développante.

C'est pourquoi dans les ouvrages techniques la surface considérée est appelée souvent *hélicoïde développable.*

La figure 234 représente les projections d'une surface dont les droites $M_1 - I$, $M_2 - II$, $M_3 - III$, etc., sont tangentes à l'hélice $M - I - II - III$, etc., construite sur le cylindre de rayon R_0. C'est une hélice à droite de pas h_0. Le lieu géométrique des traces horizontales des tangentes à l'hélice cylindrique est une développante de cercle de rayon R_0. Les points de la développante sont notés M, M_1, M_2, etc. La section de la surface considérée par un plan T perpendiculaire à l'axe du cylindre forme également une développante dont chaque point K_4, K_5, K_6, etc., est déterminé par l'intersection de la tangente correspondante avec le plan T ($T \parallel H$). L'hélicoïde développable coupe le cylindre coaxial suivant des hélices cylindriques dont le pas est égal au pas de l'arête de rebroussement de la surface.

---

[1] On appelle développée d'une courbe le lieu géométrique des centres de sa courbure. La courbe elle-même s'appelle développante. Les normales à la développante sont tangentes à la développée.

En effet, lorsque le point de contact de la génératrice rectiligne, en se déplaçant le long de l'arête de rebroussement, se déplace dans le sens de l'axe du cylindre d'un pas h_0, l'angle α étant constant

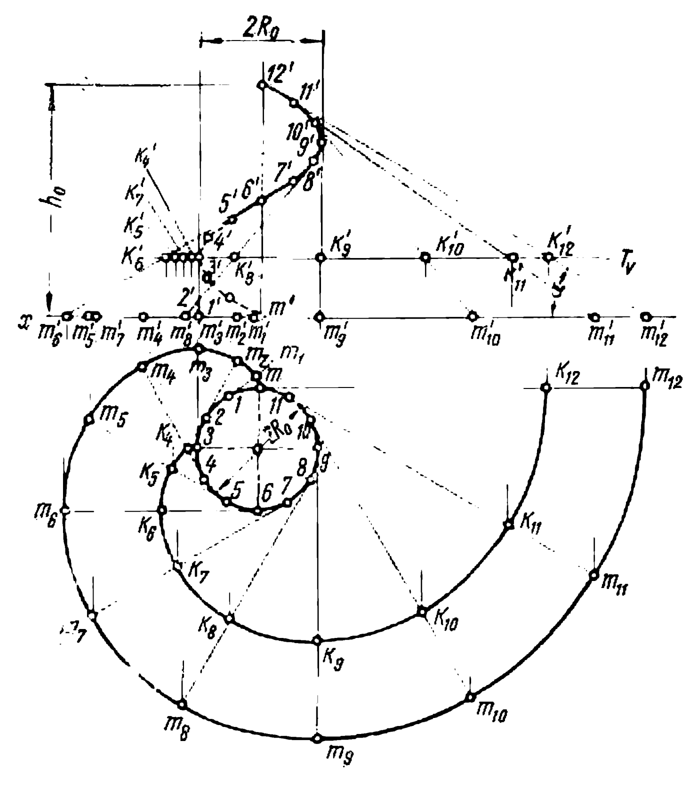


Fig. 234

(α est l'angle d'inclinaison des génératrices sur le plan perpendiculaire à l'axe de la surface), un autre point quelconque de la même génératrice se déplace dans ce sens aussi d'un pas h_0.

Les talus des remblais et des déblais d'une voie ferrée en courbe montante ont la forme d'une hélicoïde développable.

Pour établir la relation entre les paramètres géométriques de l'arête de rebroussement et de la surface des talus d'une route, recourons à la figure 235.

On y voit les projections de la plate-forme d'une voie dont l'arête de talus extérieure qui constitue la courbe $A_0 - A_1 - A_2$, etc., est une hélice. Notons que l'axe de la voie et l'arête de talus inté-

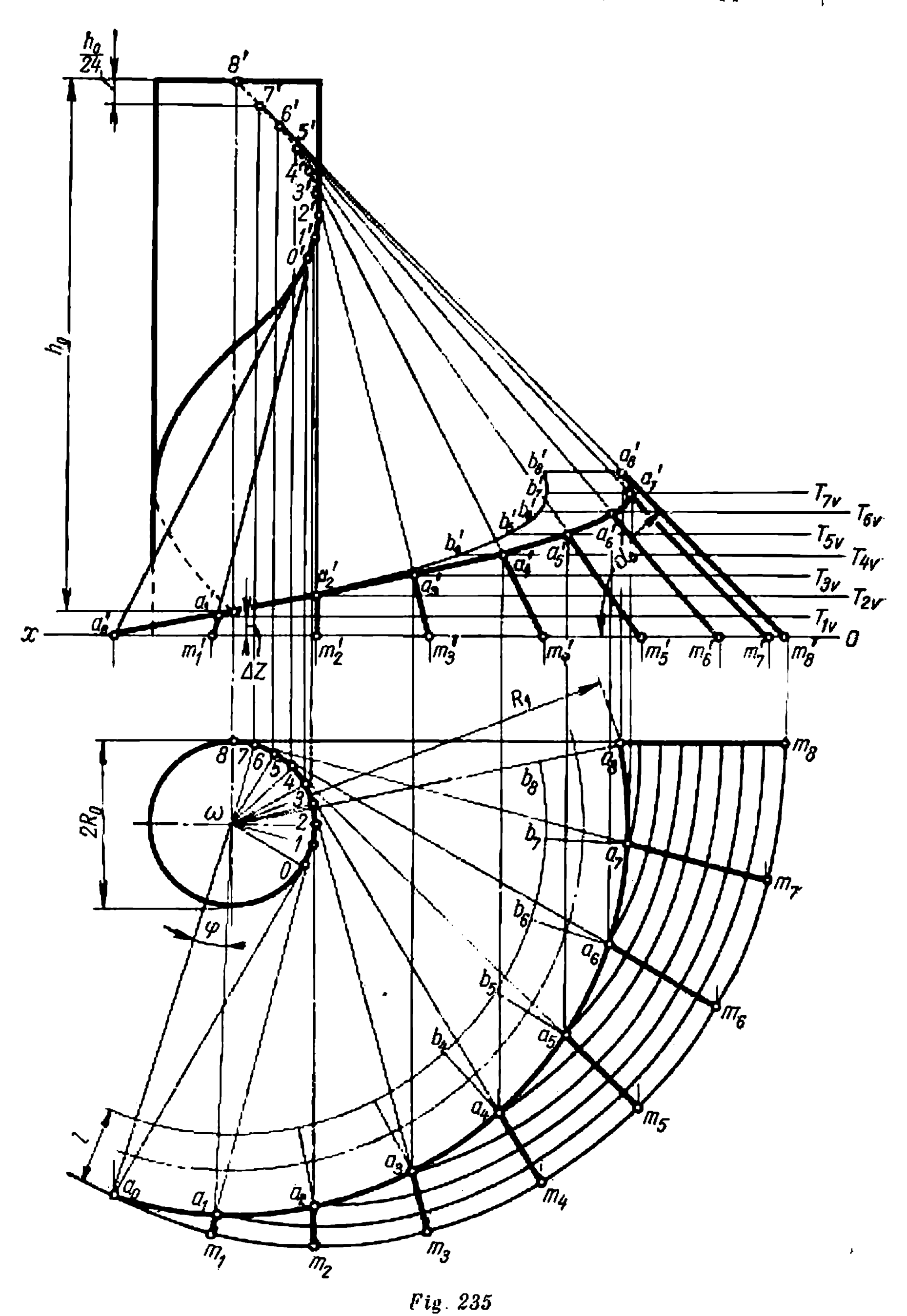


Fig. 235

rieure sont également des hélices cylindriques mais dont l'angle d'hélice [1] est différent.

La projection horizontale de l'arête de talus extérieure est formée par l'arc de circonférence de rayon R_1 mené du centre ω.

La pente I_1 de la route étant imposée, la relation $\operatorname{tg} \alpha_1 = I_1$ permet de déterminer l'angle d'hélice de l'arête α_1. Après avoir marqué sur la projection horizontale de l'arête extérieure plusieurs points a_0, a_1, a_2, etc., distants sur l'arc l'un par rapport à l'autre de la valeur $R_1\varphi$ (φ est l'angle au centre en radians), on construit leurs projections frontales a'_0, a'_1, a'_2, etc. Dans ces conditions, le déplacement de chacun de ces points suivant la verticale est déterminé par l'expression

$$\Delta z = R_1\varphi \operatorname{tg} \alpha_1.$$

En plus des paramètres R_1 et α_1, la géométrie de la surface du talus de la route est définie par la pente du talus i. La pente de la surface du talus $i = \operatorname{tg} \alpha_0$, où α_0 est l'angle entre la génératrice rectiligne et le plan horizontal.

Tous ces paramètres sont supposés donnés. Le problème consiste à trouver le pas de l'arête de rebroussement et le rayon du cylindre dont la surface porte cette arête.

L'angle d'hélice de l'arête de rebroussement doit être égal à l'angle α_0 d'inclinaison des génératrices de la surface du talus. L'arête de rebroussement cherchée et l'arête extérieure de la route devant appartenir au même hélicoïde développable, on tire

$$h_0 = h_1,$$

où h_0 est le pas de l'arête de rebroussement ;

h_1, le pas de l'arête de talus.

Cette condition permet de trouver le rayon R_0 du cylindre dont la surface porte l'arête de rebroussement.

En effet, $h_0 = 2\pi R_0 \operatorname{tg} \alpha_0$ et $h_1 = 2\pi R_1 \operatorname{tg} \alpha_1$. Donc

$$R_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = R_1 \operatorname{tg} \alpha_1,$$

d'où l'on tire

$$R_0 = R_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_0},$$

ou

$$R_0 = R_1 \frac{I_1}{i}.$$

Ainsi, la valeur R_0 est déterminée par trois paramètres indépendants R_1, I_1 et i qui caractérisent la géométrie de la surface du talus d'une route dans une courbe montante.

---

[1] Lorsque la valeur de R_1 est importante et la largeur de la route l petite, les angles des arêtes et de l'axe sont posés égaux.

Après avoir construit la projection du cylindre de rayon R_0 coaxial à l'arête de talus de la route (l'axe du cylindre passe par le point ω), on trace les projections horizontales des tangentes à l'arête de rebroussement qui sont les droites a_0 — 0, a_1 — *1*, a_2 — *2*, etc. Les points *0*, *1*, *2*, etc., appartiennent à la projection horizontale de l'arête cherchée. La projection frontale de l'un de ces points, de *8'* notamment, peut être déterminée aisément en établissant que la tangente A_8 — *VIII* est parallèle au plan *V*, car sur l'épure (a_8 — *8*) || *Ox*. L'angle compris entre la projection frontale a'_8 — *8'* de cette tangente et l'axe *Ox* est égal à l'angle donné α_0 d'inclinaison des génératrices de la surface du talus au plan horizontal. L'intersection de la droite menée par le point a'_8 sous un angle α_0 à l'axe *Ox* et de la ligne de rappel donne le point *8'*.

Si l'on connaît la valeur du pas h_0 et l'angle au centre $\varphi = 15°$ qui détermine le déplacement angulaire de chaque point par rapport au précédent, on peut trouver les projections frontales des autres points de l'arête de rebroussement, de *7'* avant tout, puis de *6'*, etc.

Il est clair que lorsque $\varphi = \frac{1}{24} 360°$, le pas h_0 doit être également divisé par 24.

En joignant les points ainsi trouvés *0'*, *1'*, *2'*, etc., avec les points respectifs a'_0, a'_1, a'_2, etc., situés sur l'arête de talus extérieure, on obtient les projections frontales des génératrices rectilignes d'un hylicoïde développable. Celles des parties de chacune d'elles qui appartiennent à la surface du talus de remblai sont représentées par un trait légèrement plus gras. Le plan horizontal de projection *H*, les plans T_1, T_2, T_3, etc., qui lui sont parallèles, coupent la surface du talus suivant des développantes du cercle de rayon R_0. Leur construction ne se distingue en rien de celle des courbes représentées sur la figure 234 où l'on détermine les projections des sections d'un hélicoïde développable par les plans *H* et *T*.

§ 43. Surfaces hélicoïdales

Une surface hélicoïdale est engendrée par le déplacement hélicoïdal d'une certaine ligne. La ligne animée d'un mouvement hélicoïdal s'appelle génératrice de la surface hélicoïdale.

Sous le terme de mouvement hélicoïdal on entend la combinaison de la translation parallèle à un certain axe (axe de l'hélice) et de la rotation autour de ce même axe. Dans ces conditions, la translation et le déplacement angulaire sont liés par une relation définie:

$$\Delta h = k \Delta \varphi,$$

où Δh est la translation de la génératrice en un temps Δt;

$\Delta\varphi$, le déplacement angulaire pendant le même temps;
k, le coefficient de proportionnalité.

Lorsque le coefficient k est une constante, on obtient une surface à pas constant [1]; s'il n'en est pas ainsi on obtient une surface à pas variable.

La surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une droite est un *hélicoïde*. La position de la génératrice rectiligne d'une surface hélicoïdale par rapport à l'axe d'hélice détermine la différence entre une surface de vis à filet triangulaire (vis d'Archimède), un hélicoïde développable et un hélicoïde réglé.

La surface de vis à filet triangulaire est engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une droite A_0B_0 concourante à l'axe de la vis (fig. 236).

Tous les points de la génératrice rectiligne à l'exception d'un seul se déplacent suivant des hélices cylindriques. La figure 236 représente le tracé de l'hélice décrit par le point A_0. Un des points de la génératrice, celui où la génératrice rencontre l'axe de la surface, ne participe pas au mouvement hélicoïdal. Ce point est désigné par B_0; il n'effectue qu'une translation rectiligne le long de l'axe de la surface, de plus, lorsque la génératrice tourne d'un angle $\varphi = 360°/n$, le point B_0 se déplace avec la droite le long de l'axe de $1/n$ du pas h.

En joignant les points A_1, A_2, A_3, etc., de l'hélice avec les points respectifs B_1, B_2, B_3, etc., situés sur l'axe, on obtient des droites dont le lieu géométrique est la surface de vis à filet triangulaire (vis d'Archimède).

La section d'une telle surface par le plan T perpendiculaire à son axe donne la spirale d'Archimède. Une telle surface est mise à profit dans de nombreuses machines pour la manutention des corps pulvérulents, pour le malaxage des liquides visqueux, dans les convoyeurs à vis sans fin, dans les malaxeurs, etc.

La forme d'une surface à vis d'Archimède est conférée aux fraises mères employées pour le taillage des roues dentées, aux surfaces actives des vis des transmissions par vis sans fin. La surface des pièces filetées présente également une surface de vis d'Archimède. La figure 237 schématise la formation d'un filet triangulaire. Le profil de ce filet est constitué par un triangle équilatéral ABC dont le plan passe par l'axe de la vis. Lors du déplacement hélicoïdal du profil qui longe le cylindre, deux côtés du triangle, AB et BC, engendrent la surface hélicoïdale.

Les sommets du profil triangulaire ABC se déplacent suivant les hélices dont les projections sont construites sur la figure 238. Le

---

[1] On appelle pas d'une surface hélicoïdale la valeur du déplacement linéaire de la génératrice en un tour.

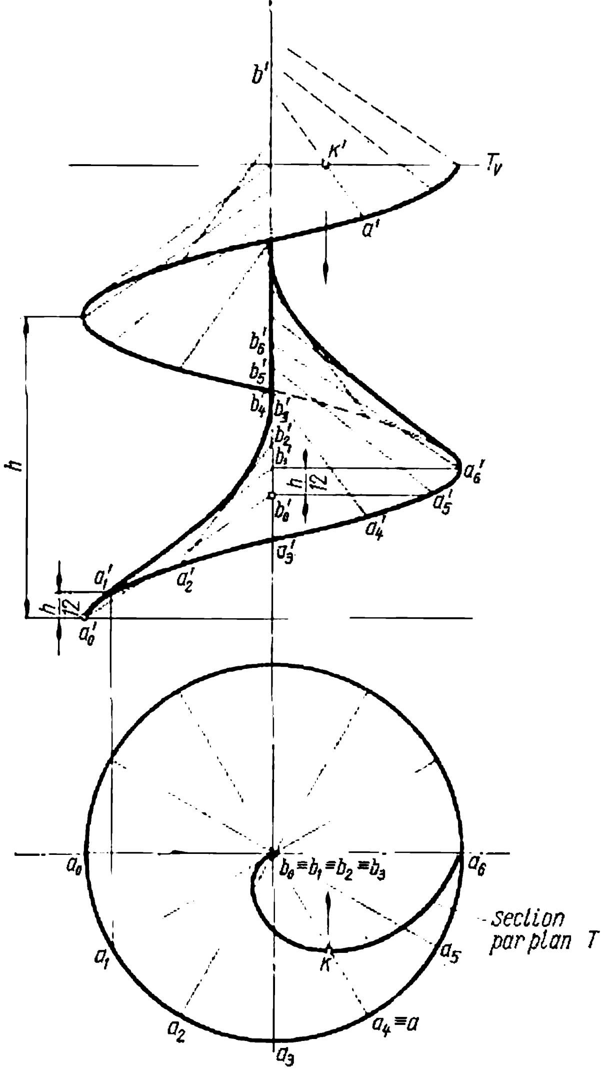


Fig. 236

contour apparent de la vis sur la projection frontale est délimité par les tangentes communes aux hélices extérieure et intérieure, dont le tracé est représenté à une échelle agrandie sur la figure 239.

La section de la vis par un plan horizontal T donne une figure délimitée par la spirale d'Archimède (voir fig. 238).

Pour construire la spirale, il faut déterminer les points d'intersection des côtés du triangle ABC animé d'un mouvement

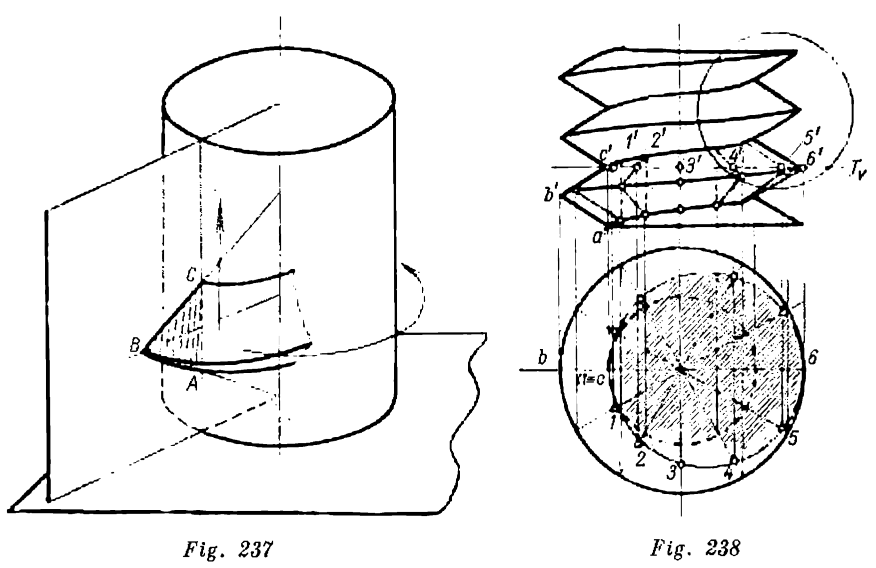


Fig. 237   *Fig. 238*

hélicoïdal, avec le plan T. Les six premiers points (I à VI) sont les points d'intersection du plan T et du côté BC dans les différentes positions de ce dernier.

La moitié supérieure de la section est symétrique à la moitié inférieure par rapport à l'axe horizontal, et dans ces conditions, chaque point du contour de la moitié supérieure de la section est un point d'intersection du plan T et du côté AB du profil triangulaire qui s'engage d'en bas dans ce plan par un déplacement hélicoïdal.

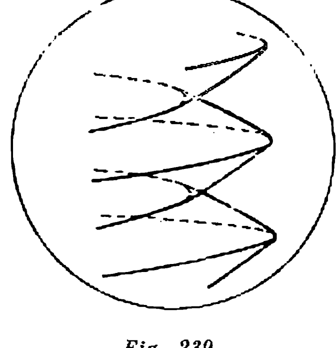


Fig. 239

Le déplacement continu du plan T vers le haut fait que la figure de la section sans changer de forme tourne autour de l'axe de la vis dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Si la génératrice coupe l'axe de la vis sous un angle droit, l'hélicoïde est dit surface de vis à filet carré. Cette forme est conférée aux toboggans (pentes douces des garages à étages multiples), aux plates-formes des voies ferrées dans le cas d'une courbe montante (voir fig. 235). Les génératrices rectilignes de la surface de la plate-

forme de la figure 235 sont notées A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6. Le prolongement de chacune d'elles coupe l'axe du cylindre sous un angle droit. La surface de la plate-forme dans ce cas est engendrée par une droite horizontale animée d'un mouvement hélicoïdal.

L'hélicoïde développable examiné dans ce qui précède (voir fig. 233 à 235) en tant que surface développable constitue le lieu géométrique des tangentes à une hélice cylindrique. Il peut être également considéré comme *engendré par le déplacement hélicoïdal d'une génératrice rectiligne qui ne rencontre pas l'axe de la vis.*

Le mouvement de la génératrice est déterminé alors par la condition suivante : l'angle d'hélice que forme la ligne hélicoïdale cylindrique décrite par le point de contact de la génératrice doit être égal à la pente de la génératrice par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de la vis.

Certaines propriétés et l'application de l'hélicoïde développable ont été examinées au § 42.

§ 44. Surfaces réglées à plan directeur

Un plan directeur, comme nous l'avons déjà dit, est déterminé par deux droites concourantes respectivement parallèles aux droites gauches considérées. *Les surfaces à plan directeur constituent un lieu géométrique de droites (génératrices) parallèles au plan directeur et coupant les deux lignes considérées dites directrices.*

Si les directrices sont constituées par deux lignes courbes, la surface est dite *cylindroïde.* Si l'une des directrices est une droite, et l'autre une courbe, la surface s'appelle *conoïde*, et, enfin, si les deux directrices sont rectilignes, la surface porte le nom de *paraboloïde hyperbolique.*

La surface du cylindroïde est déterminée par un plan directeur R (fig. 240) et *par deux directrices KL* et *MN* qui peuvent être des courbes gauches ou planes. Dans ce dernier cas les plans dans lesquels sont contenues les directrices ne doivent pas coïncider. La droite AB, tout en restant parallèle au plan donné R, lors de son déplacement suivant la directrice engendre une surface cylindrique, c'est-à-dire quelle que soit la position de la génératrice, elle vérifie la condition $A_nB_n \parallel R$.

La figure 241 représente les projections d'un cylindroïde engendré par le déplacement de la droite AB suivant les directrices KL et MN. Le plan directeur R étant dans ce cas un plan projetant vertical, les projections horizontales de la génératrice quelconque doivent être parallèles à la trace horizontale du plan R_H.

Un exemple de cylindroïde est fourni par les surfaces de certains arcs et voûtes. La figure 242 représente un arc dont la surface est le lieu géométrique des droites parallèles au plan horizontal, qui cou-

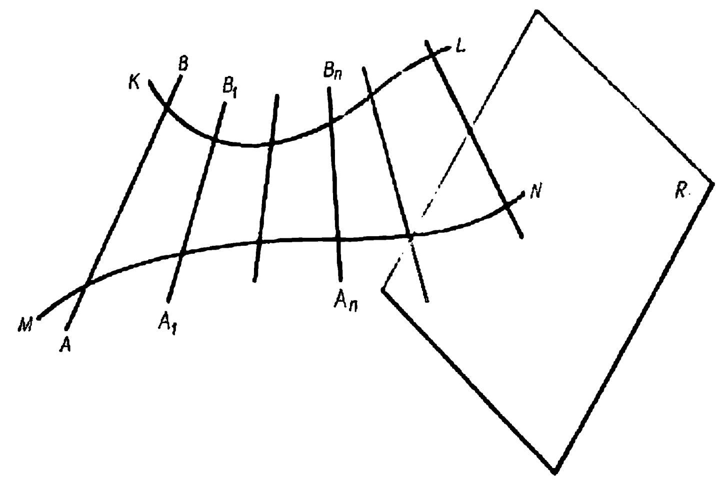


Fig. 240

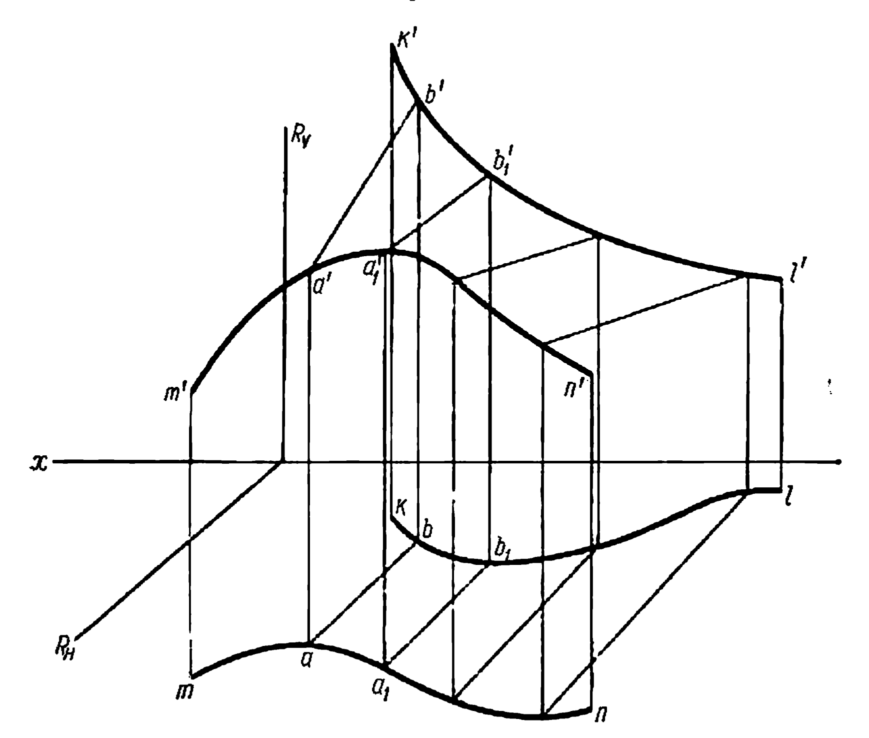


Fig. 241

pent les deux courbes KLM et $K_1L_1M_1$. Les projections de la génératrice rectiligne du cylindroïde sont notées pour deux positions AB et A_1B_1.

La surface d'un conoïde est déterminée par un plan directeur et deux directrices dont l'une est rectiligne et l'autre courbe. Cette dernière peut être gauche ou plane. Dans le deuxième cas, le plan de la courbe ne doit pas coïncider avec la directrice rectiligne.

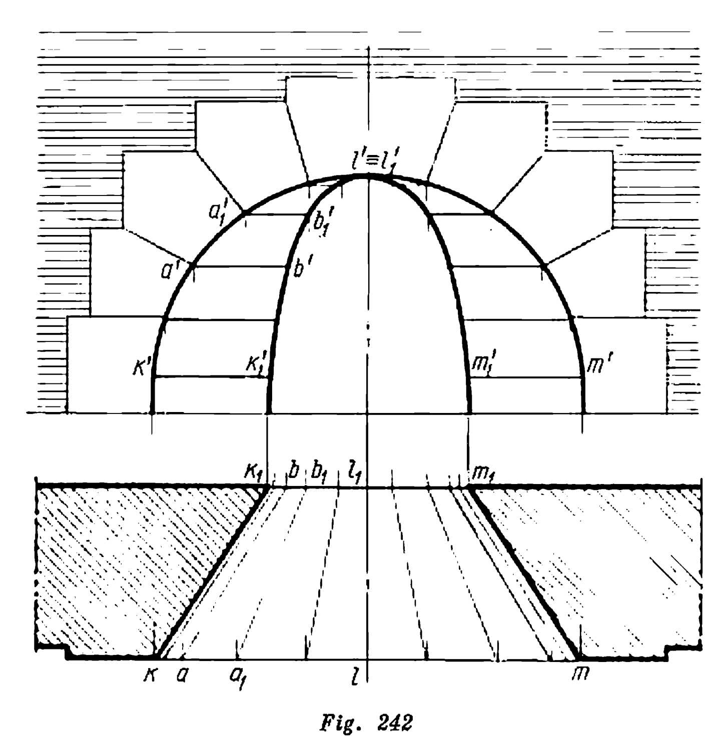


Fig. 242

Tout en restant parallèle au plan directeur R, la génératrice rectiligne AB (fig. 243) se déplaçant suivant la directrice décrit une surface de conoïde. Quelle que soit la position de la génératrice, elle doit remplir la condition $A_nB_n \parallel R$.

La figure 244 donne en projections la construction d'une des positions de la génératrice rectiligne AB du conoïde déterminé par les directrices KL et MN et le plan directeur R. Un point arbitraire A par lequel doit passer la génératrice du conoïde est choisi sur la directrice courbe KL. La position de la génératrice est déterminée par le fait qu'elle doit, premièrement, être parallèle au plan R, et deuxièmement, couper la deuxième directrice MN. Le lieu

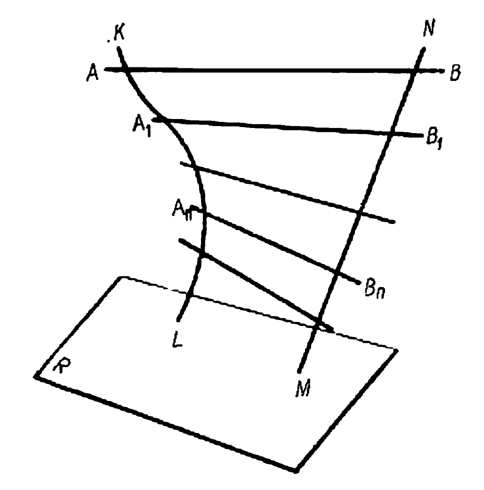


Fig. 243

Fig. 244

géométrique de toutes les droites passant par le point A et parallèles au plan R est un plan parallèle à R qui passe par ce même point A. Un tel plan R_1 est construit justement sur l'épure à partir de l'horizontale AC.

Il reste à trouver le point d'intersection de la directrice rectiligne MN avec le plan ainsi obtenu. Ce point est B ; il détermine avec A une des positions de la génératrice du conoïde. D'une manière

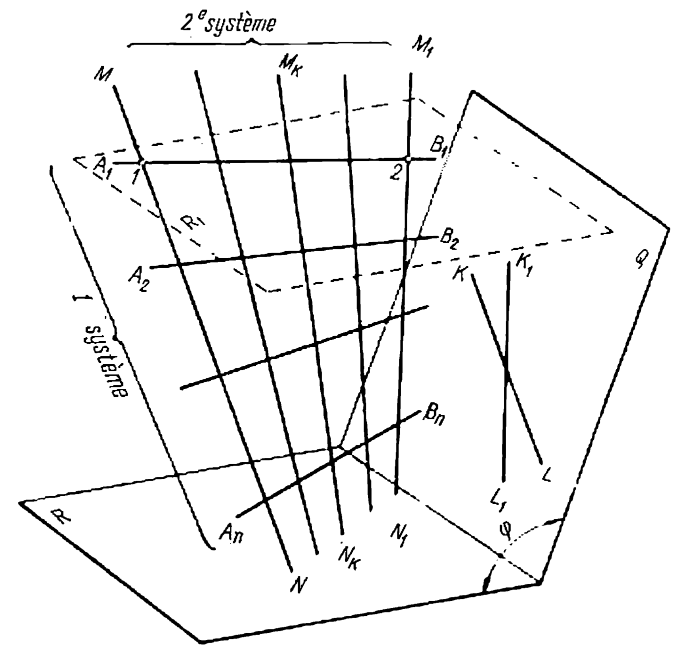


Fig. 245

analogue on peut construire les projections des génératrices coupant la courbe KL en d'autres points.

Lorsque la directrice courbe d'un conoïde est une hélice cylindrique, la directrice rectiligne est l'axe du cylindre, et le plan directeur se situe perpendiculairement à l'axe du cylindre, le conoïde se transforme en hélicoïde droit dont l'application en technique a été indiquée dans ce qui précède.

La surface d'un paraboloïde hyperbolique est déterminée par un plan directeur R et deux directrices rectilignes non situées dans le même plan. Tout en restant parallèle au plan directeur R, la génératrice rectiligne AB qui se déplace suivant les directrices décrit une surface de paraboloïde hyperbolique (fig. 245). Par conséquent, là également

quelle que soit sa position, la génératrice doit vérifier la condition $A_nB_n \parallel R$.

Voici certaines propriétés d'une telle surface.

1. *La surface d'un paraboloïde hyperbolique est à double génération. De même qu'un hyperboloïde à une nappe, cette surface est engendrée par deux systèmes de génératrices rectilignes.*

2. *Deux génératrices du même système sont gauches.*

3. *Deux génératrices de systèmes différents sont concourantes.*

4. *Chaque système de génératrices a un plan directeur propre.*

Lorsqu'un paraboloïde hyperbolique est donné par deux directrices MN et M_1N_1 (voir fig. 245) et le plan directeur R, le deuxième système de génératrices rectilignes et le deuxième plan directeur s'obtiennent de la manière suivante.

On construit avant tout les génératrices du système à plan directeur R. A cet effet on choisit un certain plan R_1 parallèle à R. Les points *1* et *2* d'intersection du plan R_1 et des directrices MN et M_1N_1 déterminent la position d'une des génératrices A_1B_1. En déplaçant le plan R_1 parallèlement au plan R, on peut construire toute une série de génératrices du premier système, représentées sur la figure 245 par les droites $A_2B_2, \ldots, A_nB_n$. En plus du premier système de génératrices, il y a encore deux directrices rectilignes MN et M_1N_1 qui appartiennent au paraboloïde hyperbolique et qui doivent faire partie justement du deuxième système. Cette dernière proposition est fondée sur le fait que le paraboloïde hyperbolique est une surface à double génération. Le deuxième plan directeur est déterminé par deux droites concourantes respectivement parallèles aux droites MN et M_1N_1.

La figure 245 représente le plan Q déterminé par les droites $KL \parallel MN$ et $K_1L_1 \parallel M_1N_1$. Le plan Q est précisément le deuxième plan directeur. Le deuxième système de génératrices s'obtient par le déplacement d'une des directrices du premier système (MN, par exemple) suivant deux génératrices quelconques du premier système, A_1B_1 et A_nB_n par exemple. Le mouvement de la droite MN doit être tel que dans toute position elle reste parallèle au plan Q, c'est-à-dire que $M_kN_k \parallel Q$.

La grandeur de l'angle φ entre les plans directeurs permet d'établir la différence entre un paraboloïde hyperbolique équilatère ($\varphi = 90°$) et gauche ($\varphi \neq 90°$).

La surface d'un paraboloïde hyperbolique, déterminée dans ce qui précède par deux directrices rectilignes et un plan directeur, peut l'être également par un quadrilatère gauche. On appelle quadrilatère gauche une figure formée par deux couples de droites gauches.

Soit, en effet, un tel quadrilatère $ABCD$ (fig. 246). Ses deux côtés opposés, AB et CD par exemple, peuvent être considérés comme directrices, alors que les deux autres côtés, AD et BC, servent à définir

le plan directeur. Sur la figure considérée ce plan est constitué par le plan *R* qui se confond avec le côté *BC* et la droite *CE*, de façon que cette dernière soit parallèle à *AD*.

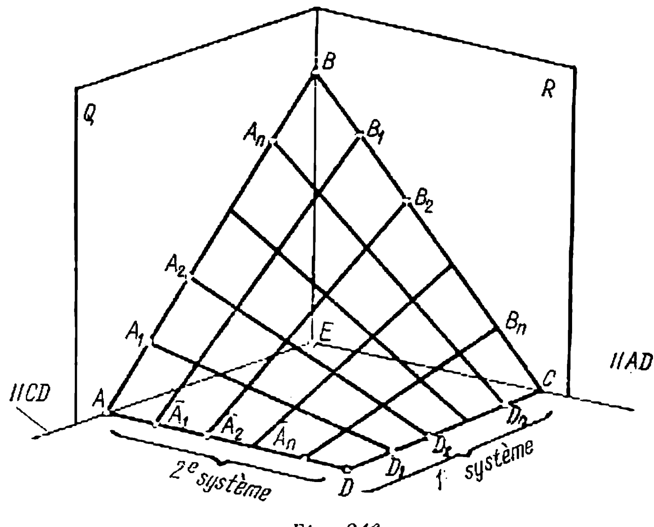


Fig. 246

Les génératrices du premier système du paraboloïde hyperbolique peuvent être engendrées par le déplacement du côté *AD* suivant les côtés *AB* et *CD* choisis comme directrices, la droite *AD*

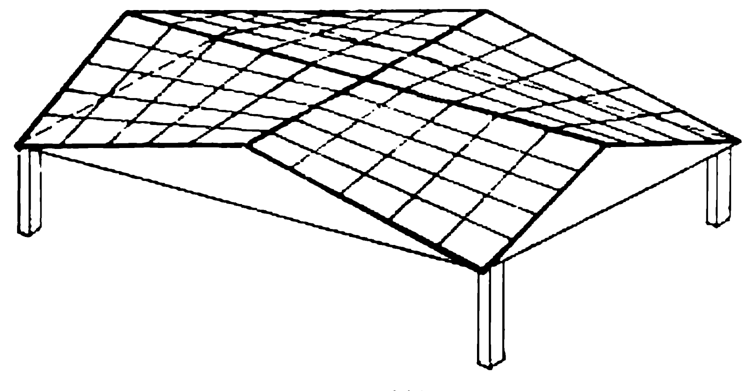


Fig. 247

restant parallèle au plan *R*. Les génératrices rectilignes du deuxième système s'obtiennent par le déplacement de *AB* ou de *CD* suivant

les deux autres côtés opposés du quadrilatère, AD et BC dans notre cas, AB ou CD se déplaçant parallèlement au plan Q qui en tant que plan directeur doit être parallèle à AB comme à CD. Sur la figure 246, le plan Q est confondu avec le côté AB et passe par la droite $AE \parallel CD$. Les génératrices du deuxième système sont les droites AB, A_1B_1, A_2B_2, . . ., A_nB_n et CD.

La forme d'un paraboloïde hyperbolique est affectée à la toiture des locaux sansappuis intermédiaires. La forme la plus simple est celle d'un quadrilatère gauche sur le plan carré. L'assemblage de quatre quadrilatères de ce type reposant sur des appuis placés en coins est représenté sur la figure 247.

INTERSECTION D'UNE SURFACE COURBE ET D'UN PLAN OU D'UNE DROITE

§ 45. Section plane d'une surface courbe

La section plane [1] d'une surface courbe peut être considérée comme le lieu géométrique des points d'intersection des lignes tracées à la surface et du plan considéré. Pourtant pour assurer une meilleure précision et rendre plus aisée la construction, il convient de choisir les lignes les plus simples. Pour les surfaces réglées ce sont des génératrices rectilignes, pour les surfaces de révolution, des circonférences (parallèles de la surface de révolution).

La figure 248 représente la construction d'une section de la surface d'un paraboloïde hyperbolique par un plan projetant vertical Q. Le paraboloïde hyperbolique est formé dans ce cas par le déplacement de la droite AB parallèle au plan V suivant des droites gauches AD et BC. Les points I, II, III, . . . sont les points d'intersection des génératrices rectilignes de la surface avec le plan Q. Leur lieu géométrique détermine justement la courbe de la section cherchée. Des exemples analogues étaient donnés par les figures 234 et 236.

La construction de la ligne d'intersection du plan avec une surface cylindrique ou conique se ramène à la solution du même problème de position sur l'intersection d'une droite et d'un plan. Généralement, ces constructions doivent débuter par la détermination des points de repère de la ligne cherchée, auxquels on n'adjoint qu'ensuite les points courants. On rapporte aux points de repère les points le plus bas et le plus haut de la section et les points limites sur le contour apparent des projections. Les deux premiers permettent d'établir dans quelle partie de la surface suivant la hauteur faut-il chercher les points intermédiaires, et les points limites sur le contour de chaque projection séparent la partie visible de la section de la partie cachée.

La figure 249 montre la construction des points le plus haut et le plus bas de la section d'un cylindre oblique par le plan Q. Après la transformation du plan Q en un plan projetant et la construction d'une nouvelle projection frontale du cylindre sur le plan V_1 on voit que la cote maximale correspond au point I, et minimale au point II. Leurs projections frontales dans le système V_1/H sont déterminées par l'intersection de Q_{V_1} avec le contour de la projection du cylindre sur le plan V_1. Le passage au système initial V/H impose la construction des génératrices sur lesquelles se situent les points ainsi trouvés. La trace horizontale de l'une est notée A, celle de l'autre, B. Les quatre points de repère suivants (III, IV, V et VI) sont les points

[1] Sous le terme de « section plane » on entend une figure formée par l'intersection d'une surface et d'un plan.

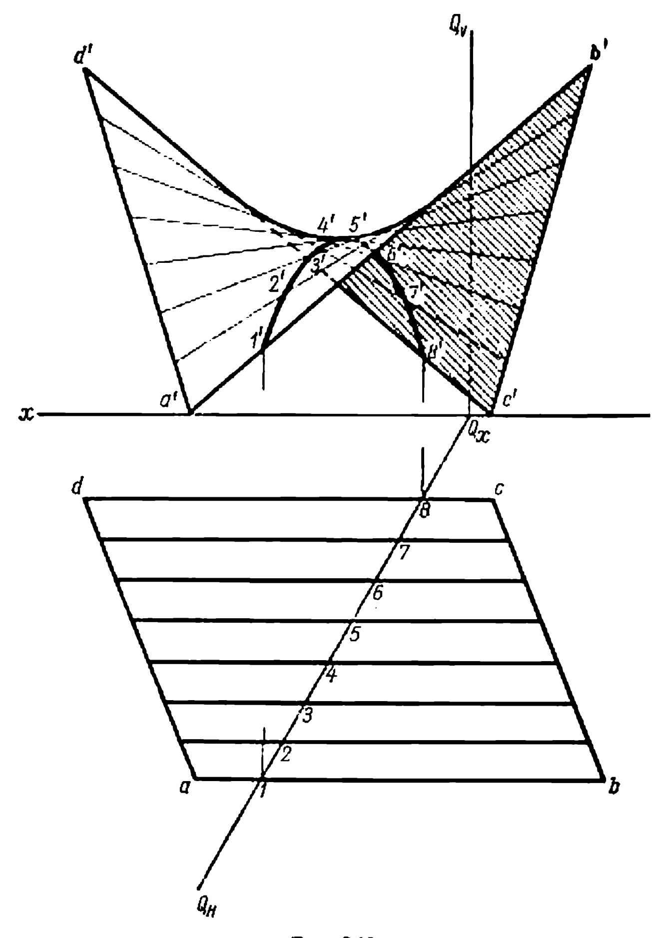
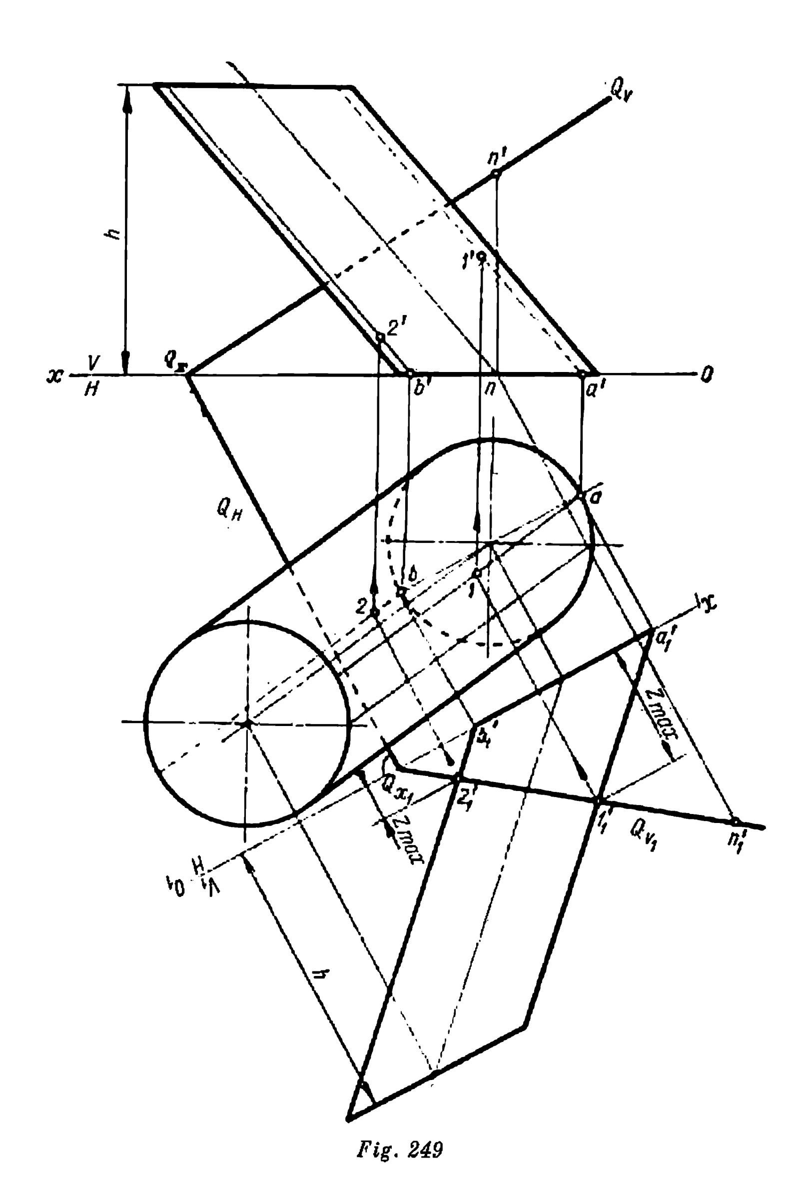


Fig. 248

d'intersection des génératrices du contour du cylindre avec le plan Q (fig. 250). Pour déterminer ces points, on mène par les génératrices du contour les plans projetants verticaux R, R_1, R_2, R_3 qui, étant parallèles entre eux, coupent le plan considéré Q suivant des droites parallèles. On trouve d'une manière analogue les autres points de la section cherchée.

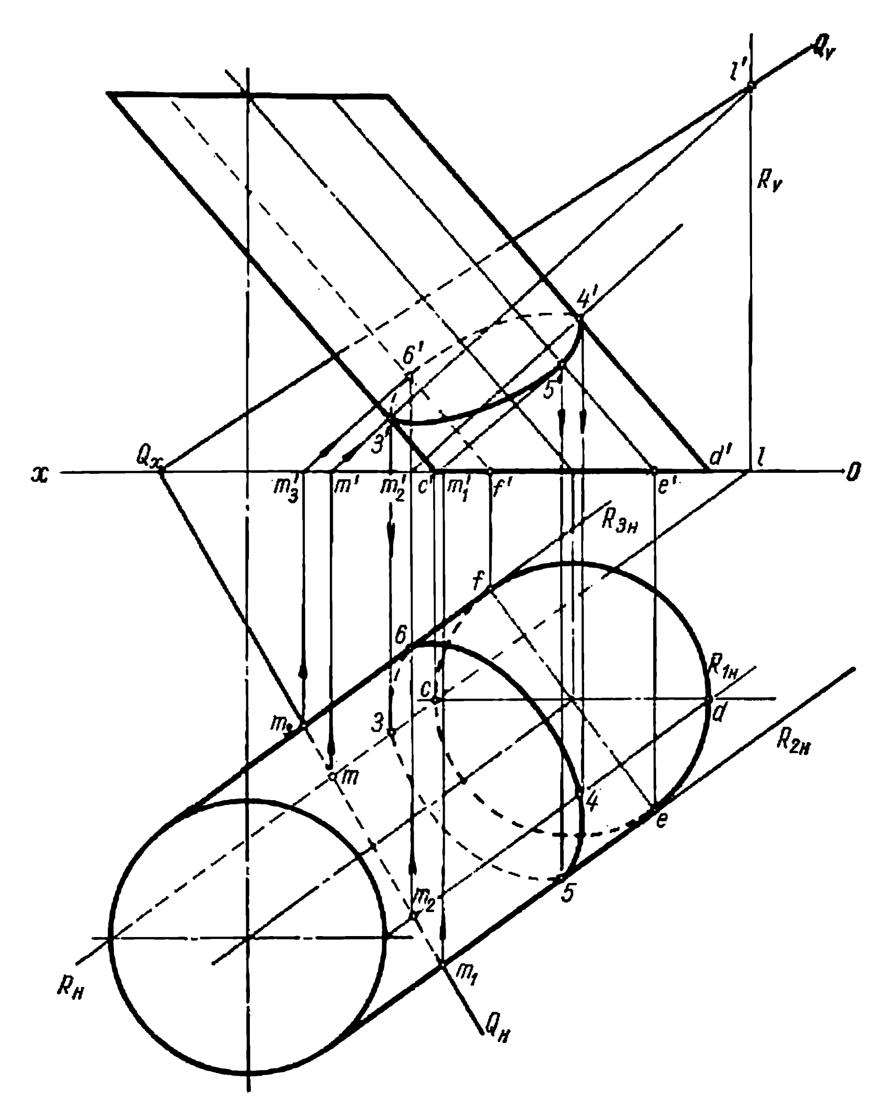
Le problème de la construction de la section plane d'une surface réglée est nettement simplifié lorsque le plan considéré est un plan projetant.

La figure 251 donne un exemple de construction des projections d'un assemblage de montant en bois. Les plans Q et R composent



Q_V
n'
1'
h
2'
x
V
H
Q_x
b'
n
a'
0
Q_H
a
b
2
1
x
a_1'
z max
1_1'
Q_x1
2_1'
1_1'
Q_V1
n_1'
z max
H
V_1
0_1
h

Fig. 249



Q_V
l'
R_V
$4'$
$6'$
$5'$
$3'$
Q_x
d'
l
x
O
m'_3
m'
m'_2
c'
m'_1
f'
e'
R_{3H}
f
6
R_{1H}
c
d
m_3
3
R_{2H}
m
4
e
5
m_2
R_H
m_1
Q_H

Fig. 250

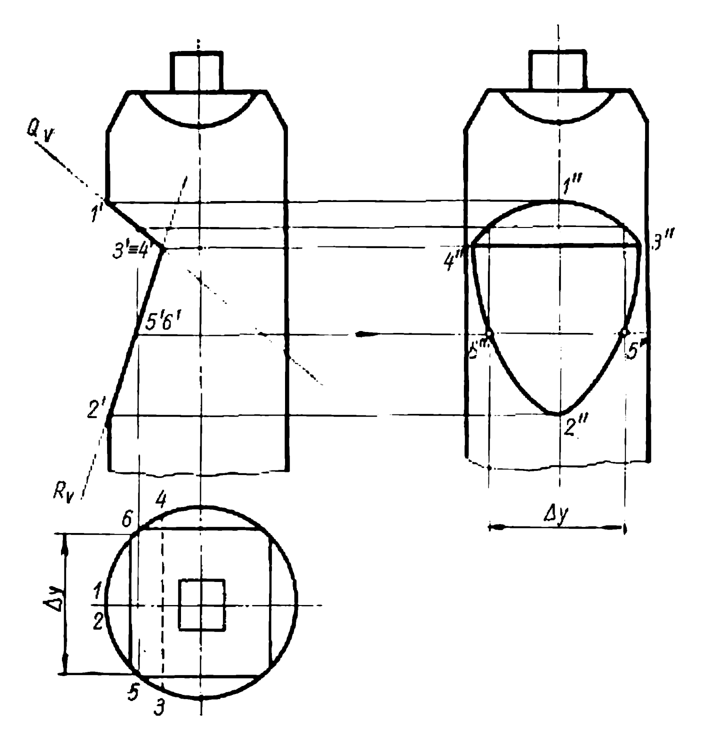


Fig. 251

un certain angle avec l'axe du montant cylindrique et le coupent suivant des segments d'ellipse dont les projections frontales se confondent avec les traces de même indice des plans projetants, alors que les projections horizontales forment un segment de cercle. Lors de la construction des projections de profil des segments la distance entre deux points symétriques des arcs elliptiques dans le sens transversal (direction perpendiculaire au plan V) est déterminée par la corde Δy dont la longueur est mesurée sur la projection horizontale.

L'exemple suivant est celui de la construction de la *section d'une surface de révolution par un plan quelconque* Q (fig. 252).

Montrons d'abord que la courbe recherchée et sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe II_1 (dans le cas considéré, sur le plan H) sont des lignes à axe de symétrie. A cet effet on s'écarte de l'ordre des opérations relatives à la recherche des points d'intersection recommandé dans ce qui précède. On détermine d'abord non pas les points le plus haut et le plus bas, mais deux points courants qui appartiennent au même parallèle de la surface de révolution. La figure 252

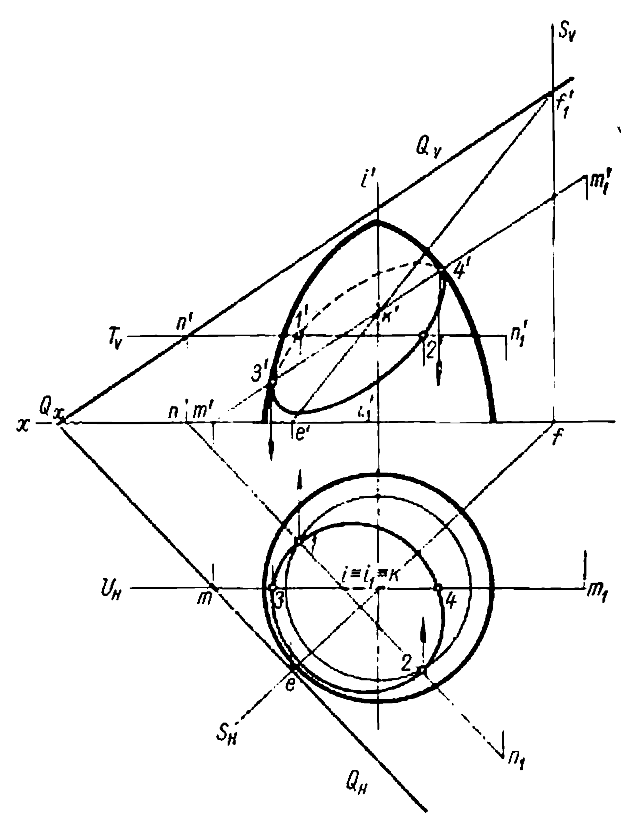


Fig. 252

représente le parallèle obtenu par l'intersection de la surface avec le plan T perpendiculaire à l'axe II_1. Le plan auxiliaire T coupe le plan considéré Q suivant l'horizontale NN_1. Le parallèle de la surface de révolution et l'horizontale NN_1 tout en se trouvant dans le même plan T se coupent en I et II, points reposant sur la ligne cherchée. Les points obtenus sont symétriques par rapport au plan S, perpendiculaire à la corde $I - II$ en son milieu. Notons que dans ces conditions le plan S, lieu géométrique des points équidistants des extrémités de la corde $I - II$, passe par l'axe de la surface de révolution dont tous les points sont également équidistants des points I et II.

Il est évident que pour un couple quelconque de points situés aux extrémités de cordes d'autres circonférences parallèles à la corde $I - II$, le plan S est également un plan de symétrie. Par conséquent, la courbe de section de la surface de révolution par le plan Q est

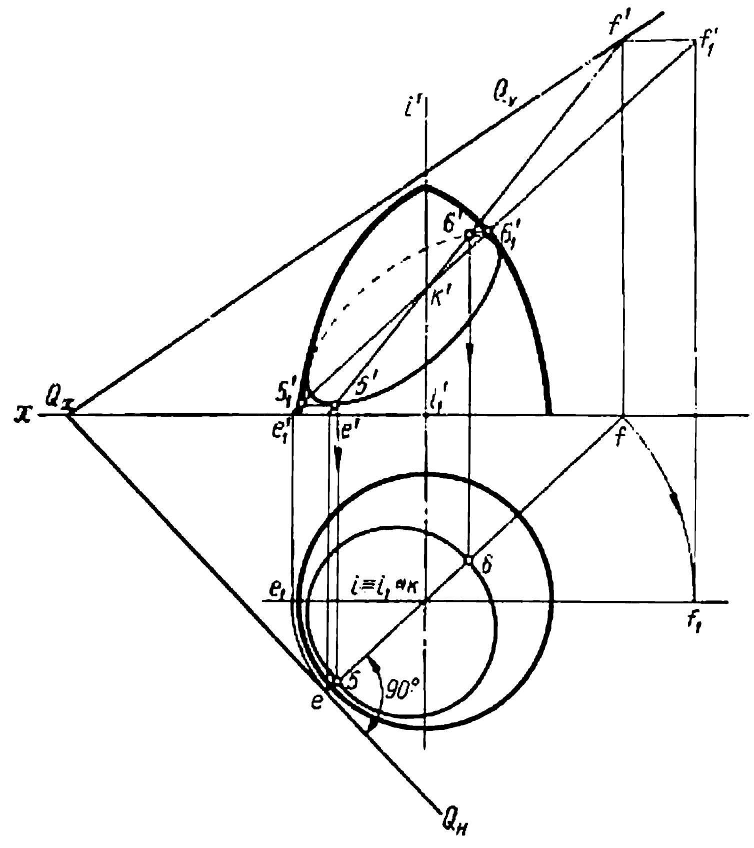


Fig. 253

une courbe symétrique dont l'axe de symétrie est constitué par la droite EF d'intersection des plans S et Q. *Cet axe de symétrie est la ligne de plus grande pente du plan Q, laquelle coupe l'axe de la surface de révolution.*

La projection de la section sur le plan perpendiculaire à l'axe II_1 a également toutes les propriétés de symétrie, car les segments qui joignent les points de la section symétriques entre eux sont parallèles à ce plan.

Les points le plus haut et le plus bas sont dans ce cas symétriques à eux-mêmes, et donc chacun d'eux se situe sur l'axe de symétrie de la section. Cette déduction permet d'établir un mode suffisamment simple de détermination de ces points.

1. Mener dans le plan Q la ligne de plus grande pente qui est la droite EF coupant l'axe de la surface de révolution (fig. 253).

2. Tourner cette droite et le méridien de la surface dont le plan se confond avec elle autour de l'axe II_1 jusqu'à la position E_1F_1, où la droite EF et le plan du méridien deviennent parallèles à V. Indiquons que dans ces conditions le point K d'intersection de la droite EF avec l'axe II_1 reste fixe, alors que le méridien en rotation coïncide avec le méridien principal qui est le contour de la projection frontale de la surface de révolution.

3. Numéroter les points d'intersection des projections frontales du méridien principal et de la droite ainsi tournée. Sur la figure 253 ce sont les points $5'_1$ et $6'_1$.

4. Ramener par relèvement la droite E_1F_1 avec les points trouvés à sa position initiale.

Un autre couple de points de repère de la section est constitué par les points situés sur le méridien principal de la surface (sur le contour de la projection frontale). Leur construction est représentée sur la figure 252 sur laquelle le plan U parallèle à V est mené par le méridien principal. Le plan U coupe le plan Q donné suivant la frontale MM_1 laquelle, se trouvant dans le même plan que le méridien principal, le coupe aux points cherchés *III* et *IV*. Les projections frontales *3'* et *4'* des points trouvés séparent la partie visible de la projection de la section de sa partie cachée.

Considérons maintenant la construction de la section d'une sphère par un plan projetant et un plan quelconque.

1. Soient une sphère et un plan projetant de bout Q (fig. 254).

Le plan Q coupe la surface de la sphère suivant une circonférence qui se projette sur le plan H sous forme d'une ellipse. Dans ce cas les points le plus haut (*1*, *1'*) et le plus bas (*2*, *2'*) sont déterminés par l'intersection de la trace frontale Q_V avec le contour de la projection frontale de la sphère.

Les points *3* et *4* qui délimitent les parties visible et invisible de la projection horizontale s'obtiennent à l'aide d'un plan auxiliaire T_3 mené par le centre de la sphère parallèlement au plan H. La projection horizontale de la section de la sphère par le plan T_3 (circonférence) coupant la projection horizontale *mn* de l'horizontale [1] donne les points *3* et *4*.

Les plans auxiliaires T_1 et T_2 permettent d'obtenir d'autres points qui appartiennent à la section cherchée. Notons que le plan T_2 qui passe par le milieu du segment *1'* — *2'* permet de déterminer le grand axe de l'ellipse dont la longueur exprime la vraie valeur du diamètre de la circonférence de la section, c'est-à-dire les segments *5* — *6* et *1'* — *2'* sont égaux.

2. Soient une sphère de centre Ω et un plan quelconque Q déterminé par deux droites concourantes AB et BC (fig. 255).

---

[1] L'horizontale MN est la ligne d'intersection des plans T_3 et Q.

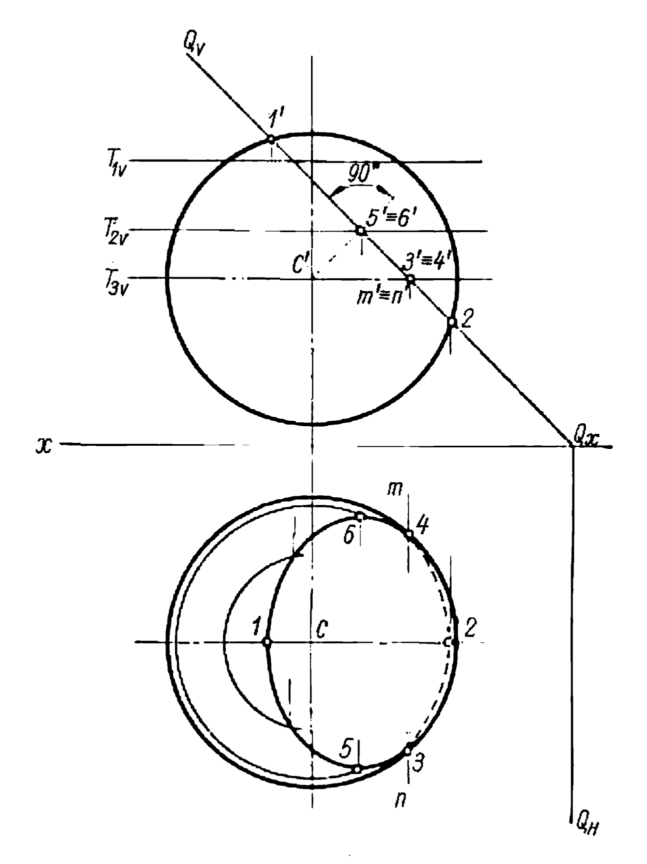


Fig. 254

Sur la figure AB est une frontale et BC une horizontale du plan Q.

Le cas considéré peut être ramené au précédent en remplaçant le plan V par le plan $V_1 \perp BC$. Dans le nouveau système V_1/H le plan donné devient projetant. La projection horizontale de la section est construite d'une manière analogue à celle de la figure 254.

Les points le plus haut et le plus bas de la section sont désignés respectivement par *I* (*1*, *1'*) et *II* (*2*, *2'*). Les chiffres *III* (*3*, *3'*) et *IV* (*4*, *4'*) désignent les points du contour de la projection horizontale de la sphère qui séparent les parties visible et invisible de la projection horizontale.

Notons que ces points (*III* et *IV*) peuvent être aussi déterminés immédiatement dans le système V/H à l'aide du plan T mené par le centre de la sphère parallèlement à H.

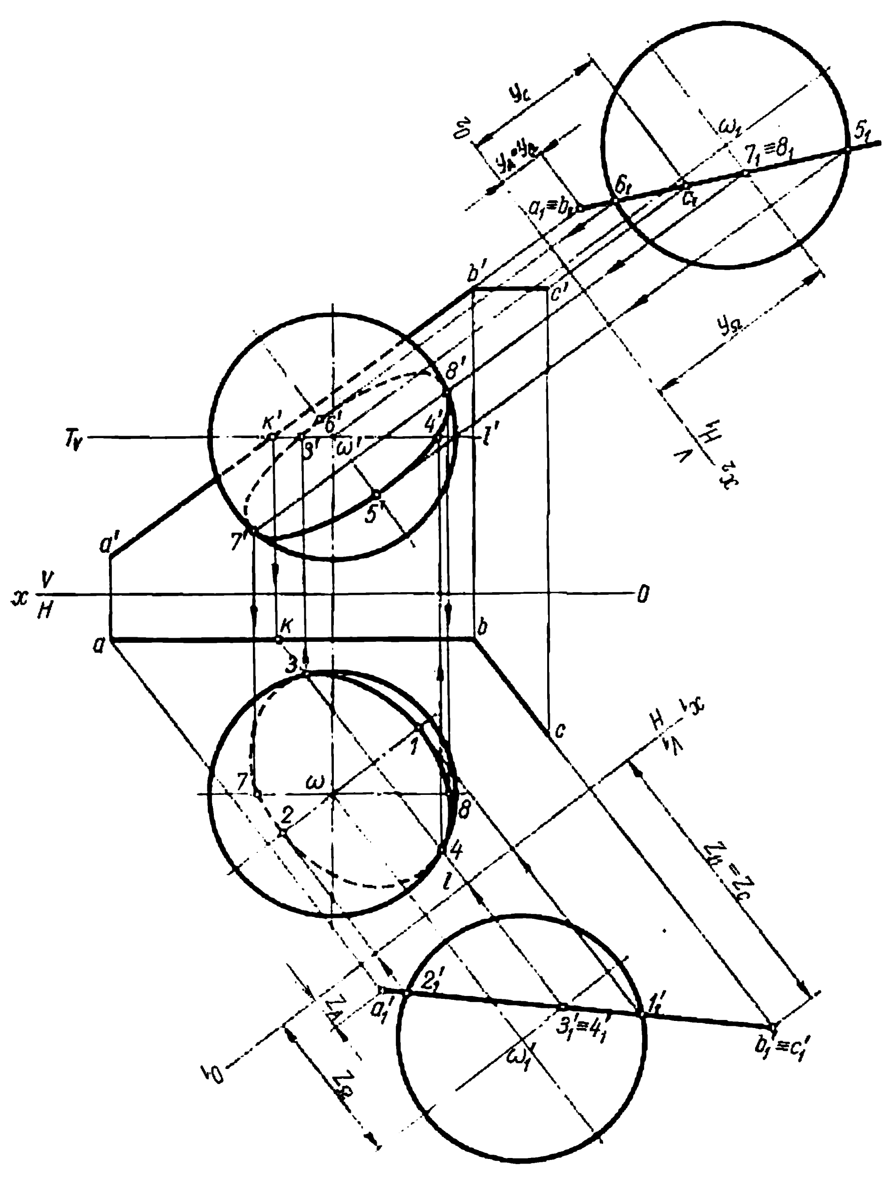


Fig. 255

Le plan T coupe le plan Q suivant l'horizontale KL ($kl \parallel bc$), et la sphère suivant l'équateur.

L'intersection des projections horizontales de l'équateur et de l'horizontale déterminent les points visibles *III* et *IV*.

La construction de la projection frontale de la section s'effectue indépendamment de la projection de la section sur le plan H déjà

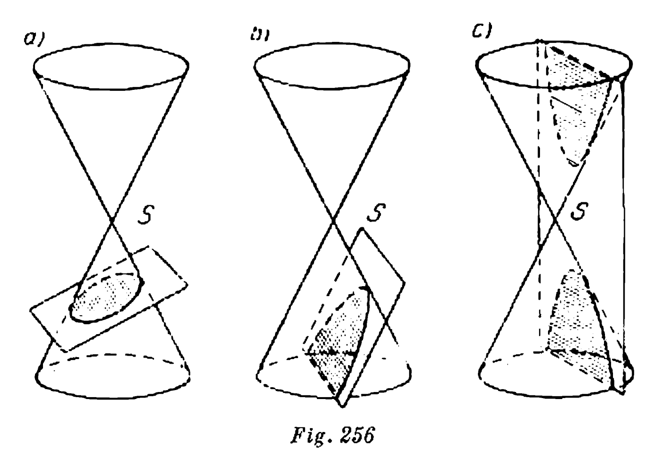


Fig. 256

construite. A cet effet il convient de passer du système V/H au système V/H_1. Le nouveau plan H_1 est perpendiculaire à la frontale AB du plan donné.

Les constructions ultérieures ne se distinguent en rien des constructions précédentes.

Notons que les chiffres *V* et *VI* désignent respectivement les points le plus éloigné et le moins éloigné du plan V. Les points *VII* et *VIII* se situent sur le méridien principal de la sphère et déterminent les limites de visibilité de la projection frontale de la section.

Lorsque les dimensions de la figure sont grandes, les points établis ne suffisent pas pour obtenir une construction précise des sections. Les points courants sont alors déterminés à l'aide de parallèles supplémentaires de la sphère comme dans le cas d'une surface de révolution quelconque (voir fig. 252, les points *I* et *II*).

Pour finir considérons les *sections* dites *coniques* très usitées en technique. La figure 256 représente trois sections d'un cône [1] de révolution par des plans différents. Sans en donner la démonstration, disons que

1) si un cône de révolution est coupé par un plan qui n'est parallèle à aucune de ses génératrices, la section est une ellipse (fig. 256, *a*) ;

[1] Un cône dont la base est un cercle est dit droit, si sa hauteur passe par le centre de la base ; sinon, il est dit oblique.

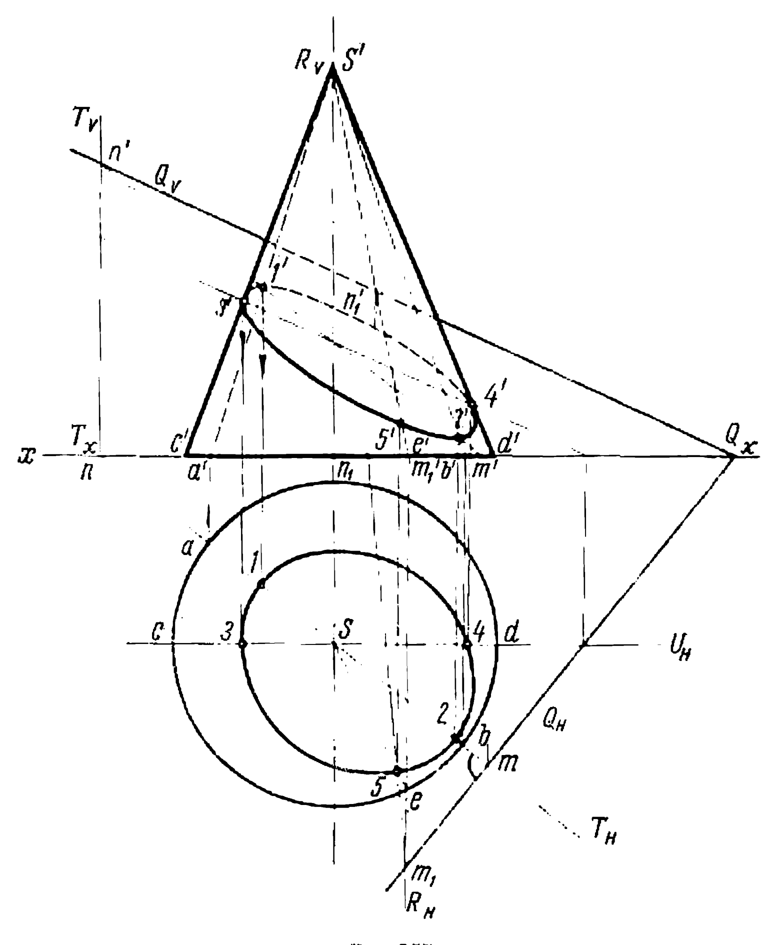


Fig. 257

2) si le même cône est coupé par un plan parallèle à une des génératrices, la section est une parabole (fig. 256,*b*) ;

3) si toujours le même cône est coupé par un plan parallèle à deux génératrices (parallèle à l'axe du cône dans le cas particulier), la section est une hyperbole (fig. 256,*c*).

Notons de plus que le plan sécant qui passe par le sommet coupe le cône suivant ses génératrices, et le plan sécant perpendiculaire à l'axe coupe le cône de révolution suivant une circonférence.

Tout ce qui vient d'être dit est vrai également dans le cas d'un cône oblique de révolution ou elliptique, c'est-à-dire d'un cône dont

la surface en coordonnées cartésiennes s'exprime par une équation de deuxième degré.

Certains exemples d'application pratique de surfaces dont les génératrices sont des sections coniques ont été donnés aux §§ 40 et 41. La construction des projections orthogonales des sections coniques est représentée sur les figures 257 et 258.

Pour la construction de la section d'un cône de révolution par un plan quelconque Q il faut d'abord trouver les points le plus haut et

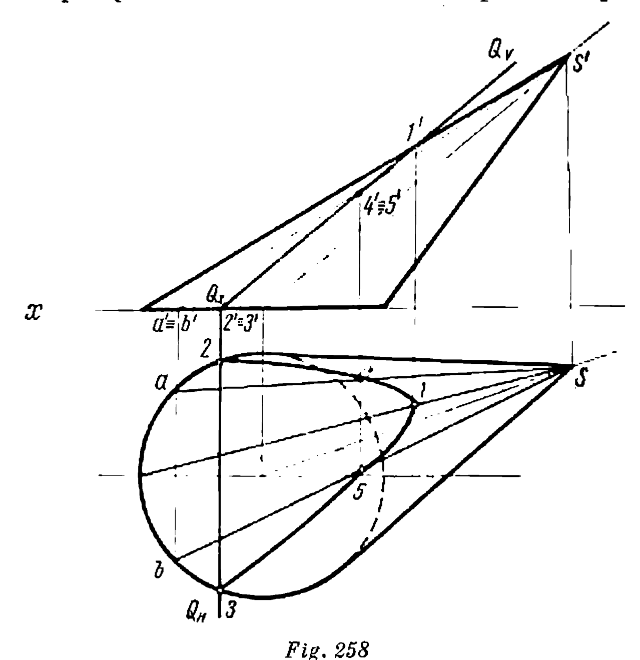


Fig. 258

le plus bas (points I et II). A cet effet on fait passer par l'axe du cône un plan T perpendiculaire à la trace Q_H. La droite MN suivant laquelle le plan T coupe le plan Q constitue l'axe de symétrie de la section cherchée. Les points le plus haut et le plus bas de la section, symétriques à eux-mêmes, sont déterminés par l'intersection de la droite MN avec les génératrices SA et SB suivant lesquelles le plan T coupe le cône. Ensuite à l'aide d'un plan auxiliaire $U \parallel V$ on construit les points III et IV des génératrices du contour SC et SD. Puis on détermine les points courants où les génératrices rectilignes du cône rencontrent le plan Q. Sur la figure 257 on a construit à titre d'exemple le point V qui appartient à la génératrice SE.

Le cône oblique représenté sur la figure 258 est coupé par le plan projetant de bout Q parallèle à son axe. La section conique est dans

ce cas l'hyperbole dont les projections de l'une des branches ont été construites sur la figure 258. La ligne obtenue constitue le lieu géométrique des points d'intersection des génératrices rectilignes du cône avec le plan considéré.

§ 46. Intersection d'une droite et d'une surface courbe

Le problème de la détermination des points d'intersection d'une droite et d'une surface courbe se résout dans le même ordre que celui d'établissement des points d'intersection d'une droite et d'un plan ou d'une surface de polyèdre. Rappelons la succession des opérations:

1) *mener par la droite considérée AB un plan auxiliaire Q* (fig. 259);

2) *trouver la ligne d'intersection de la surface donnée F et du plan auxiliaire Q qui est la courbe f*, et

3) *déterminer les points d'intersection K_1 et K_2 de la courbe ainsi obtenue avec la droite AB.*

Le nombre de points cherchés est défini par le type de surface et sa position par rapport à la droite.

Dans la résolution des problèmes concrets, la construction est simplifiée en choisissant un plan auxiliaire tel que sa ligne d'intersection avec la surface considérée soit la plus simple possible. Ainsi, pour trouver les points d'intersection d'une droite et d'une surface conique ou cylindrique, le plus commode est de recourir à des plans sécants simples.

Comme dans le cas de la pyramide, on appelle par convention plan sécant simple d'un cône un plan qui passe par le sommet du cône et le coupe suivant les génératrices.

Sur la figure 260 un tel plan Q est défini par la droite donnée AB et le sommet du cône S. Pour construire la trace horizontale Q_H il a fallu passer d'un plan déterminé par un point et une droite à un plan déterminé par deux droites concourantes AB et SC (C est un point quelconque de AB). Leurs traces horizontales M et M_1 déterminent Q_H. En joignant les points I et II, où Q_H coupe la base du cône avec le sommet S, on obtient une section du cône qui a la forme du triangle $ISII$. On marque les points d'intersection des projections des côtés de ce triangle avec les projections de la droite donnée AB. Les points obtenus K et L sont les points cherchés.

Un plan sécant simple permet de trouver les points d'entrée et de sortie d'une droite AB sur la surface cylindrique considérée (fig. 261).

Comme dans le cas du prisme, le plan sécant simple doit couper le cylindre suivant un parallélogramme, et sa surface latérale suivant des génératrices. Sur la figure 261 le plan sécant simple Q est déterminé par deux droites concourantes, la droite donnée AB et la droite auxiliaire CM_1 menée parallèlement aux génératrices du cylindre. La trace horizontale de ce plan est déterminée par deux points M et M_1,

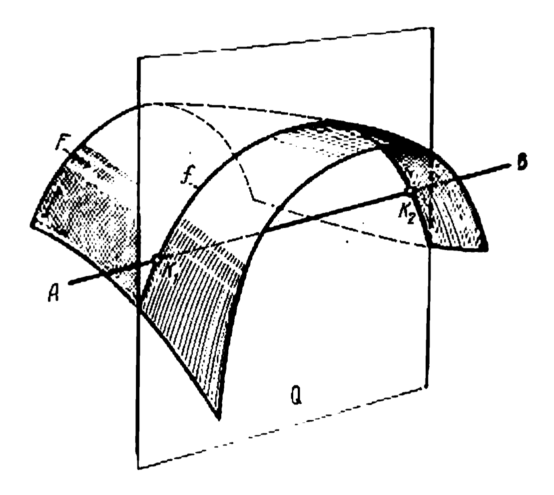


Fig. 259

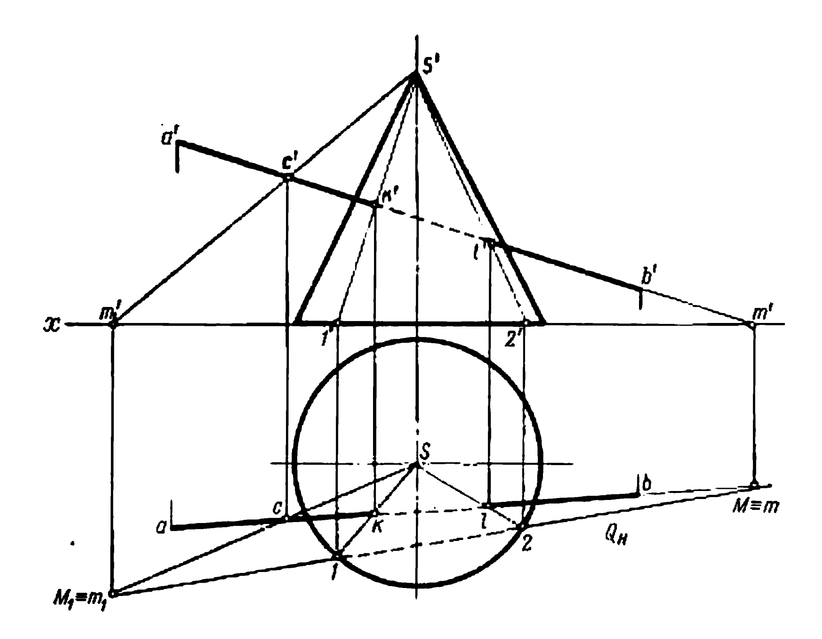


Fig. 260

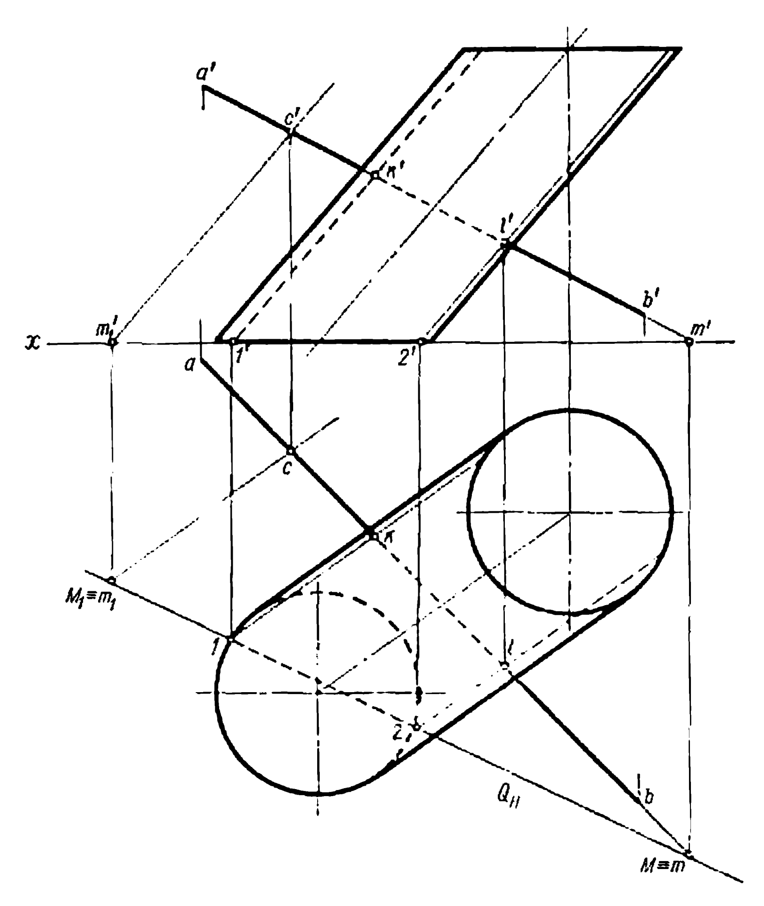


Fig. 261

traces des droites AB et CM_1. On trace les génératrices par les points I et II, où Q_H coupe la base du cylindre. Les points K et L appartenant à la droite donnée AB et aux génératrices du cylindre ainsi obtenues sont les points cherchés.

La figure 262 illustre la détermination des points K_1 et K_2 d'intersection d'une droite AB et d'une surface de révolution.

Pour construire les projections des points cherchés on mène par la droite un plan projetant vertical Q et détermine deux lignes ($I - II - III - IV - V$ et $I_1 - II_1 - III_1 - IV_1 - V_1$) de son intersection avec la surface de révolution. Les courbes sont construites à l'aide des parallèles suivant le mode exposé au § 45.

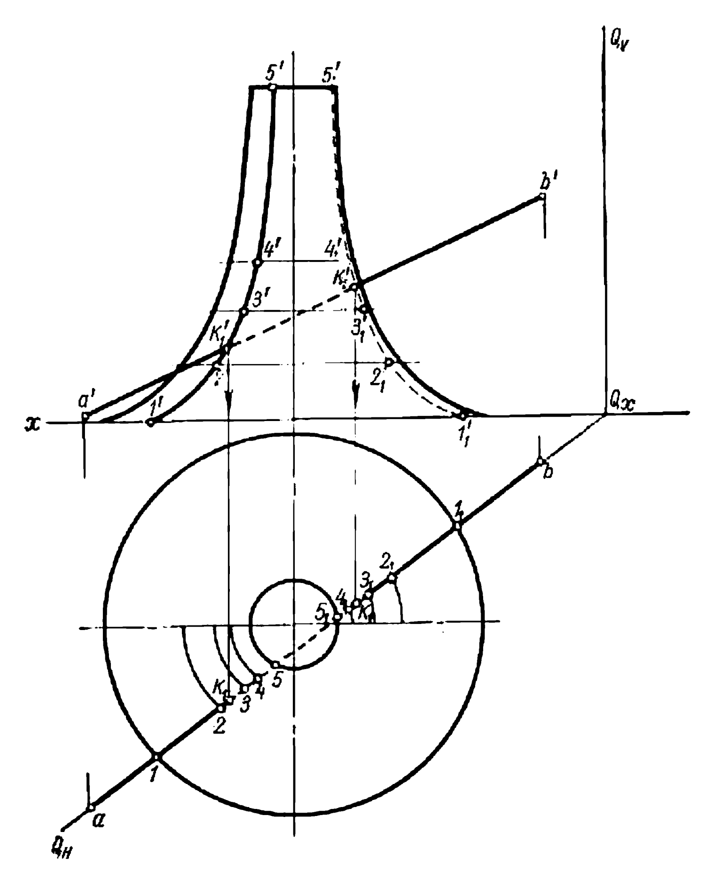


Fig. 262

La figure 263 montre la détermination des points K et L, où la droite AB coupe la surface d'une sphère. Là également on mène par AB un plan auxiliaire Q qui coupe la sphère suivant une circonférence. Pour ne pas avoir à construire la projection de la circonférence (l'ellipse) sur le plan V, on résout le problème par le changement de plans de projection.

La position du nouveau plan V_1 satisfait aux conditions suivantes: $V_1 \perp H$ et $V_1 \parallel AB$.

Il en résulte que le plan V_1 est parallèle au plan auxiliaire Q et que la ligne d'intersection du plan Q et de la sphère se projette sur V_1 en vraie grandeur. La construction de la projection de la ligne d'intersection sur V_1 demande moins de temps et donne un résultat plus pré-

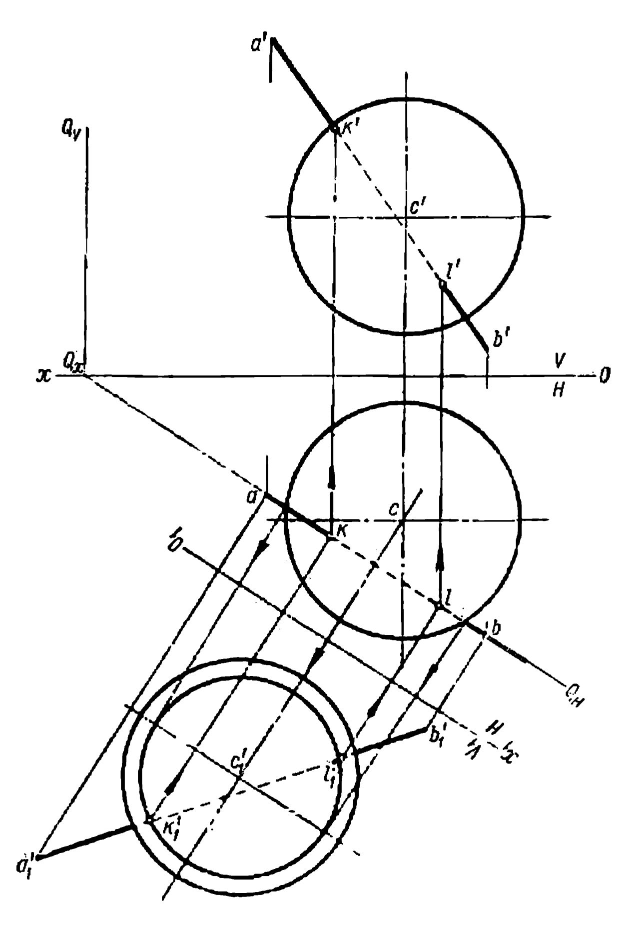


Fig. 263

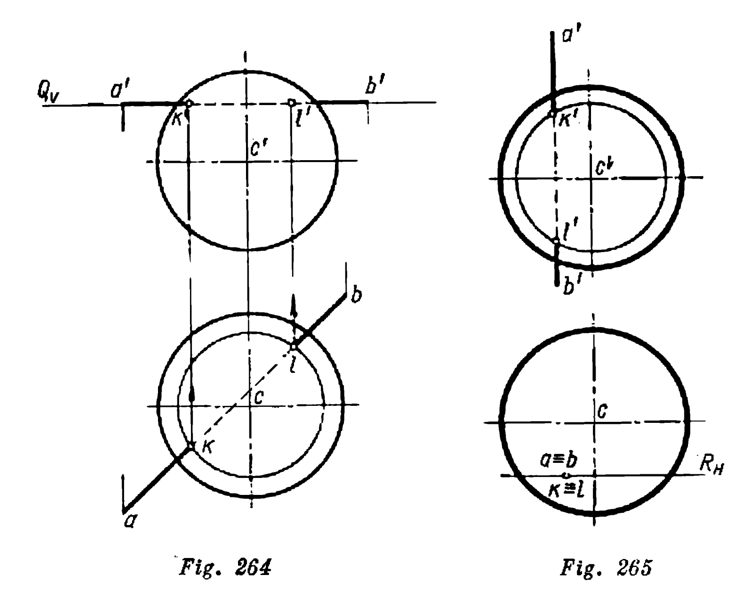


Fig. 264

Fig. 265

cis que la construction de la projection de cette même ligne sur le plan *V*.

Il convient de retenir que le changement de plans recommandé n'est avantageux que lorsque la droite *AB* est une droite quelconque. Pour les cas particuliers où la droite est parallèle à *H* ou à *V* (fig. 264 et 265) ce changement n'est pas nécessaire.

CHAPITRE IX

PLANS TANGENTS AUX SURFACES COURBES

§ 47. Généralités

En géométrie différentielle on démontre qu'un plan tangent à une surface F en un point A est le lieu géométrique des tangentes à toutes les courbes de la surface qui passent par ce point.

Par conséquent, *la position du plan Q tangent à la surface en un point donné A peut être déterminée par deux droites AB et AC dont chacune est tangente à une courbe de la surface passant par le point A*. Sur la figure 266, AB et AC sont tangentes aux courbes f_1 et f_2.

Les exemples qui vont être examinés montrent que le contact d'un plan avec une surface peut avoir lieu soit en un point, soit suivant une ligne (droite ou courbe plane). Un plan tangent à la surface en un point donné peut couper cette surface suivant une ou plusieurs lignes. La surface peut comporter des points par lesquels on ne peut pas mener un plan tangent. Ces points sont dits *singuliers*. On y rapporte les points nodaux de la surface, les points de l'arête de rebroussement, les sommets vifs des surfaces de révolution (lorsque la génératrice et l'axe de rotation se coupent sous un angle différent de droit).

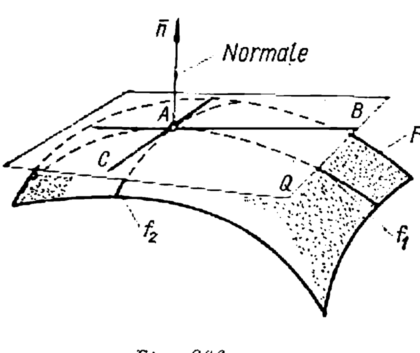


Fig. 266

Aux points singuliers, le plan tangent ou bien n'est pas déterminé d'une manière univoque, ou bien n'existe pas. Les points par lesquels on peut faire passer un plan tangent unique s'appellent *ordinaires*. Voici enfin encore une notion, celle de la *normale* à la surface ; *c'est la perpendiculaire au plan tangent passant par le point de contact*. La construction des normales aux surfaces courbes se ramène en somme à la construction des plans tangents.

§ 48. Plans tangents aux surfaces réglées

Une surface réglée est le lieu géométrique des droites appelées génératrices. Un plan tangent à une surface réglée en un point quelconque d'une génératrice donnée passe par cette génératrice. Il en est ainsi parce que chaque génératrice est une tangente à elle-même.

Dans le cas général, la normale à la surface change de direction en passant d'un point à l'autre le long de la génératrice. La rotation de la normale est suivie par celle du plan tangent, et dans ces condi-

tions l'axe de rotation est constitué par la génératrice le long de laquelle se déplace le point de contact (fig. 267) [1].

Mais si le long de la génératrice considérée toutes les normales sont parallèles entre elles, lorsque le point de contact se déplace le

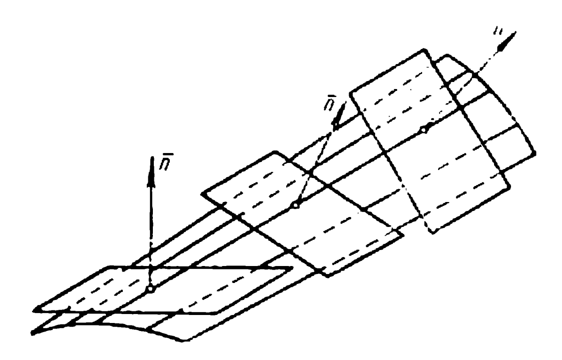


Fig. 267

long de la génératrice, le plan tangent ne change pas (fig. 268). Quand cette condition est vérifiée pour toutes les génératrices, la surface réglée est développable (voir § 42).

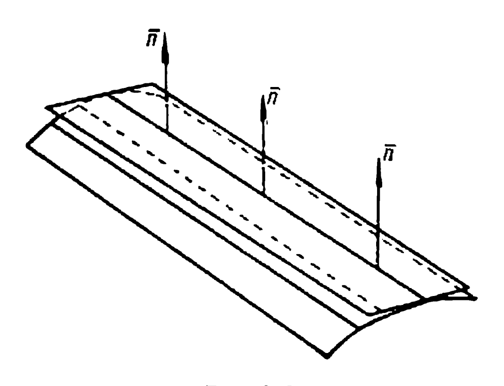


Fig. 268

Considérons des exemples concrets de construction d'un plan tangent à certaines surfaces réglées.

Exemple 1. *Mener un plan tangent à un cône passant par un point A de sa surface* (fig. 269).

La génératrice SA menée par le point donné est la ligne de contact. Elle constitue une des droites qui déterminent le plan cherché Q. La trace du plan Q

---

[1] Sur les figures 267 et 268 $\bar{n}$ désigne le vecteur normal.

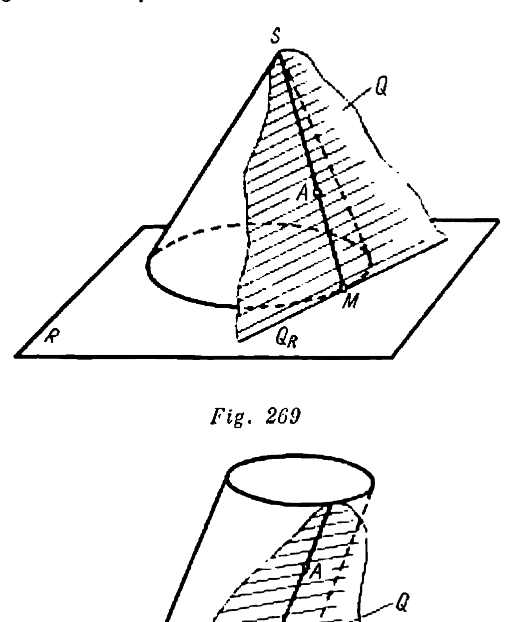


Fig. 269

Fig. 270

sur le plan R de la base du cône (qui dans un cas particulier peut devenir le plan de projection H ou V) doit passer par la trace M de la génératrice SA.

Par le point M de la base du cône on peut mener une droite qui coupe la base ou lui est tangente. Cette droite est dans le premier cas la trace d'un plan sécant simple et dans le second, d'un plan tangent.

D'une manière analogue, c'est-à-dire à l'aide de la génératrice AM et de la trace Q_R, on mène le plan tangent à un cylindre et passant par le point donné A de sa surface (fig. 270).

Si le point A donné est en dehors de la surface conique (fig. 271), le problème comporte deux solutions. Les deux plans Q et T passent alors par la droite qui joint le sommet du cône S au point considéré A et leurs traces sur le plan R sont constituées par les tangentes à la base du cône menées par la trace de même indice M de la droite SA. Dans le cas d'une surface cylindrique, ce même problème se résout en menant par le point donné une droite parallèle aux génératrices du cylindre (fig. 272). Si l'on considère la surface cylindrique comme la surface d'un cône dont le sommet se trouve à l'infini, la droite auxiliaire parallèle aux génératrices du cylindre ne se distingue en rien de la droite SA de la figure 271.

E x e m p l e 2. *Mener un plan tangent à un cône parallèlement à une droite donnée AB.*

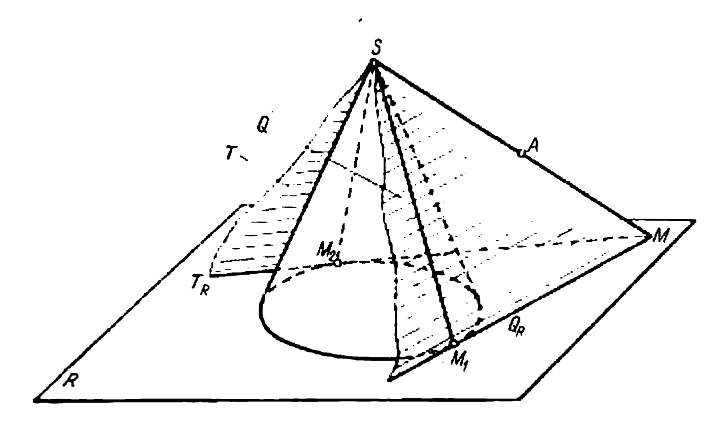


Fig. 271

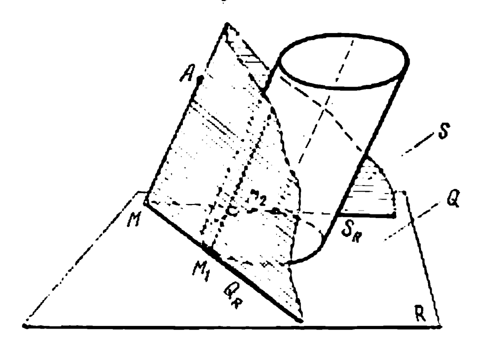


Fig. 272

Tout plan tangent à un cône doit passer par son sommet S. Mais le plan cherché doit de plus être parallèle à la droite AB. Pour satisfaire à ces deux conditions, on trace par le sommet S la droite SM parallèle à AB (fig. 273). On trouve la trace M de cette droite et mène par le point obtenu les tangentes à la base du cône. Ce sont les traces horizontales des plans cherchés Q et R, tangents aux génératrices SK et SL. La figure 273 donne la construction de Q_V et R_V à partir de la trace frontale de la droite SM.

Le problème admet une solution si la trace M de la droite auxiliaire ne se situe pas à l'intérieur de la base du cône.

Ce problème de la construction d'un plan tangent à un cône parallèlement à une droite donnée (de même que le problème analogue de la construction d'un plan tangent à un cylindre) est appliqué dans la recherche des ombres des corps. Si ces corps reposent sur un plan horizontal (sol), il est commode d'utiliser les traces horizontales des plans (fig. 273).

Le problème se complique quelque peu lorsque la base du corps se situe dans un plan quelconque (fig. 274). Pour trouver les génératrices de contact des plans parallèles à la droite considérée EF on mène par le sommet du cône S une droite $SK \parallel EF$. On fait passer par SK le plan projetant vertical Q (voir la trace Q_H),

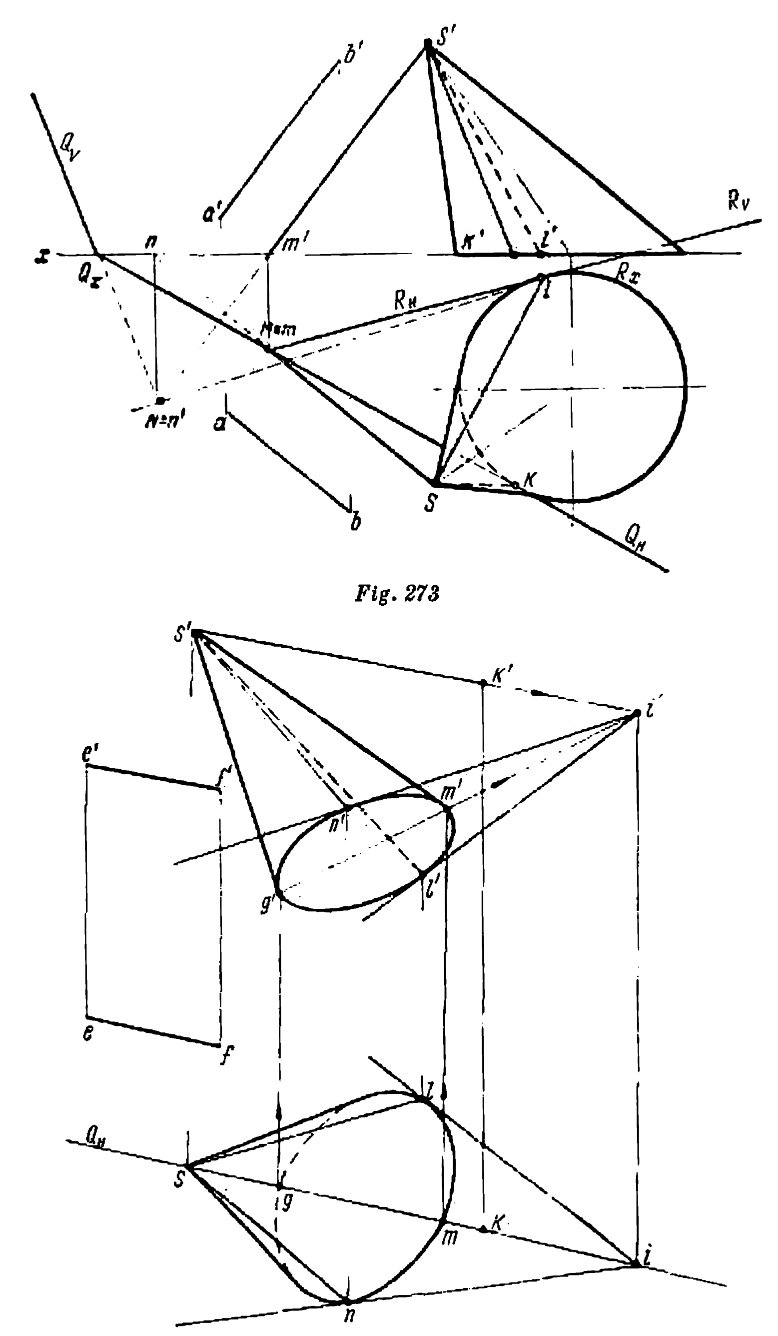


Fig. 273

Fig. 274

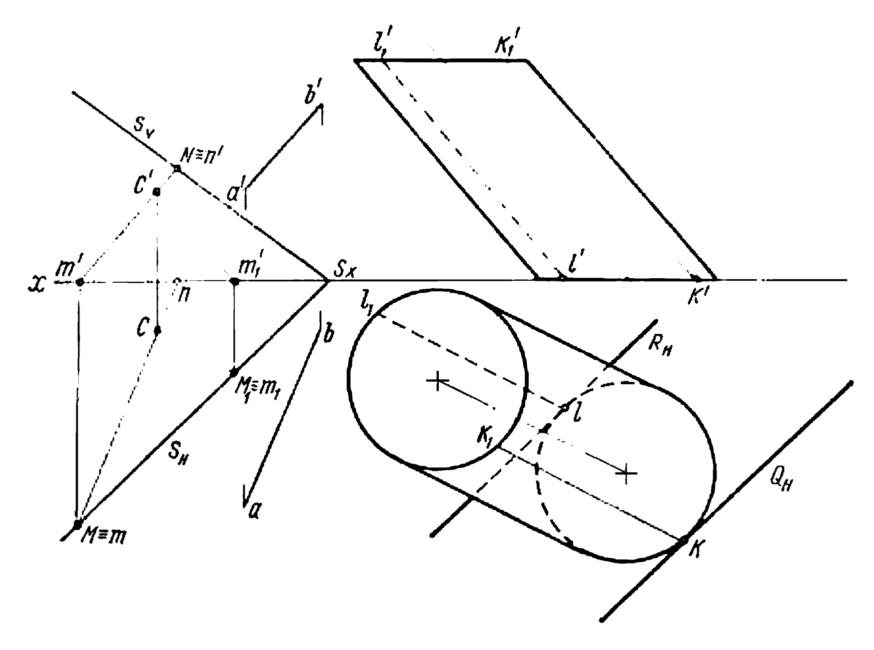


Fig. 275

et on trouve deux points (G et M) sur la droite d'intersection du plan Q et de la base du cône. Le point I marque l'intersection de la droite SK et de la base du cône (voir § 23). En traçant à partir de I les tangentes IN et IL à la base du cône, on trouve les points de contact N et L. Le contact de deux plans (parallèles à EF) avec la surface du cône s'établit précisément suivant les génératrices SN et SL.

Exemple 3. *Mener un plan tangent à un cylindre parallèle à une droite donnée* AB (fig. 275).

Une des génératrices du cylindre (ligne de contact) et une droite parallèle à la droite donnée AB appartenant au plan cherché, il faut pour déterminer la direction des traces des plans tangents construire le plan S parallèle à AB et aux génératrices du cylindre. Sur la figure 275, le plan S est déterminé par les droites concourantes CM et CM_1 ($CM \parallel AB$, CM_1 est parallèle aux génératrices).

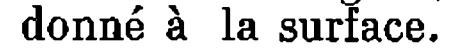
Les deux plans cherchés Q et R sont parallèles à S et sont en contact avec le cylindre suivant les génératrices respectives KK_1 et LL_1.

Exemple 4. *Mener un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe et passant par le point A de sa surface.*

Un hyperboloïde de révolution à une nappe est une surface réglée à deux génératrices rectilignes qui passent par chaque point de sa surface. Ce sont ces génératrices qui déterminent précisément le plan cherché.

Ce plan tangent à la surface au point considéré coupe l'hyperboloïde suivant deux droites. Les projections horizontales des génératrices rectilignes de la figure 276 sont construites comme des tangentes au cercle de gorge tracées à partir de a. Les projections frontales de ces droites s'obtiennent à l'aide des points M et M_1 d'intersection des génératrices avec la base inférieure de l'hyperboloïde.

Notons que le plan tangent à un paraboloïde hyperbolique, autre surface réglée à deux génératrices rectilignes, est déterminé également par deux génératrices rectilignes, menées par le point donné à la surface.



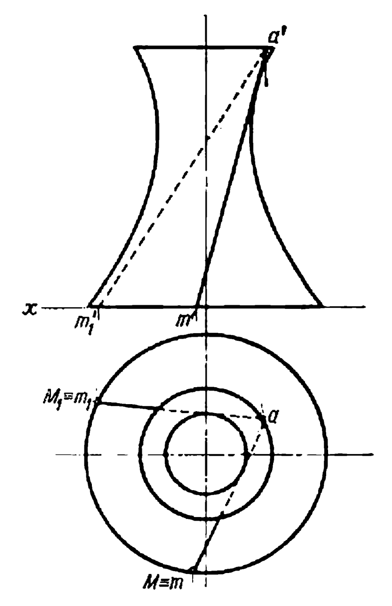


Fig. 276

§ 49. Plans tangents aux surfaces non réglées

Pour construire un plan tangent à une surface non réglée on mène par un point donné de la surface deux courbes dont les tangentes déterminent le plan recherché.

E x e m p l e 1. *Mener un plan tangent à une surface de révolution par un point A de cette surface* (fig. 277).

Si l'une des projections du point, a' par exemple, est donnée, la deuxième peut être déterminée à l'aide de constructions auxiliaires. On mène à la surface par le point donné un parallèle qui est une circonférence de rayon r. La projection frontale de ce parallèle est un segment horizontal passant par a'. Le même parallèle se projette sur le plan H sous forme d'une circonférence. La ligne de rappel nous permet de définir a (dans l'exemple considéré nous supposons que le point A se trouve sur la partie avant de la surface).

Il est avantageux de prendre comme courbes de la surface passant par A le parallèle déjà construit et le méridien. La tangente à la première est la droite AB. Se trouvant dans le même plan horizontal que le parallèle considéré, AB se projette sur V sous forme d'une droite parallèle à l'axe Ox (ligne de terre), et sur H sous forme d'une tangente à la circonférence de rayon r. Pour construire la deuxième droite (tangente au méridien), on tourne le méridien autour de l'axe II_1 jusqu'à ce qu'il coïncide avec le méridien principal. Le point A vient alors en position A_1. On mène par le point A_1 une tangente au méridien principal que l'on prolonge jusqu'à son intersection avec l'axe $I - I_1$ en C ou jusqu'à M_1 qui appartient au plan H (on peut toujours trouver un de ces points dans les limites du dessin). Il ne reste plus maintenant qu'à ramener le méridien et la tangente construite à la position initiale. En joignant le point A avec C ou avec M, on obtient une deuxième droite qui coupe AB et détermine le plan tangent recherché.

E x e m p l e 2. *Mener un plan tangent à une sphère par le point A de sa surface* (fig. 278).

Tout rayon de la sphère est une normale à la surface sphérique; le problème se réduit à la construction d'un plan perpendiculaire au rayon ΩA. Ce plan peut être déterminé par les droites AB et AC dont la première est une horizontale ($ab \perp \omega a$), et la deuxième est une frontale ($a'c' \perp \omega' a'$).

E x e m p l e 3. *Mener un plan tangent à une sphère par un point A donné en dehors de la surface* (fig. 279).

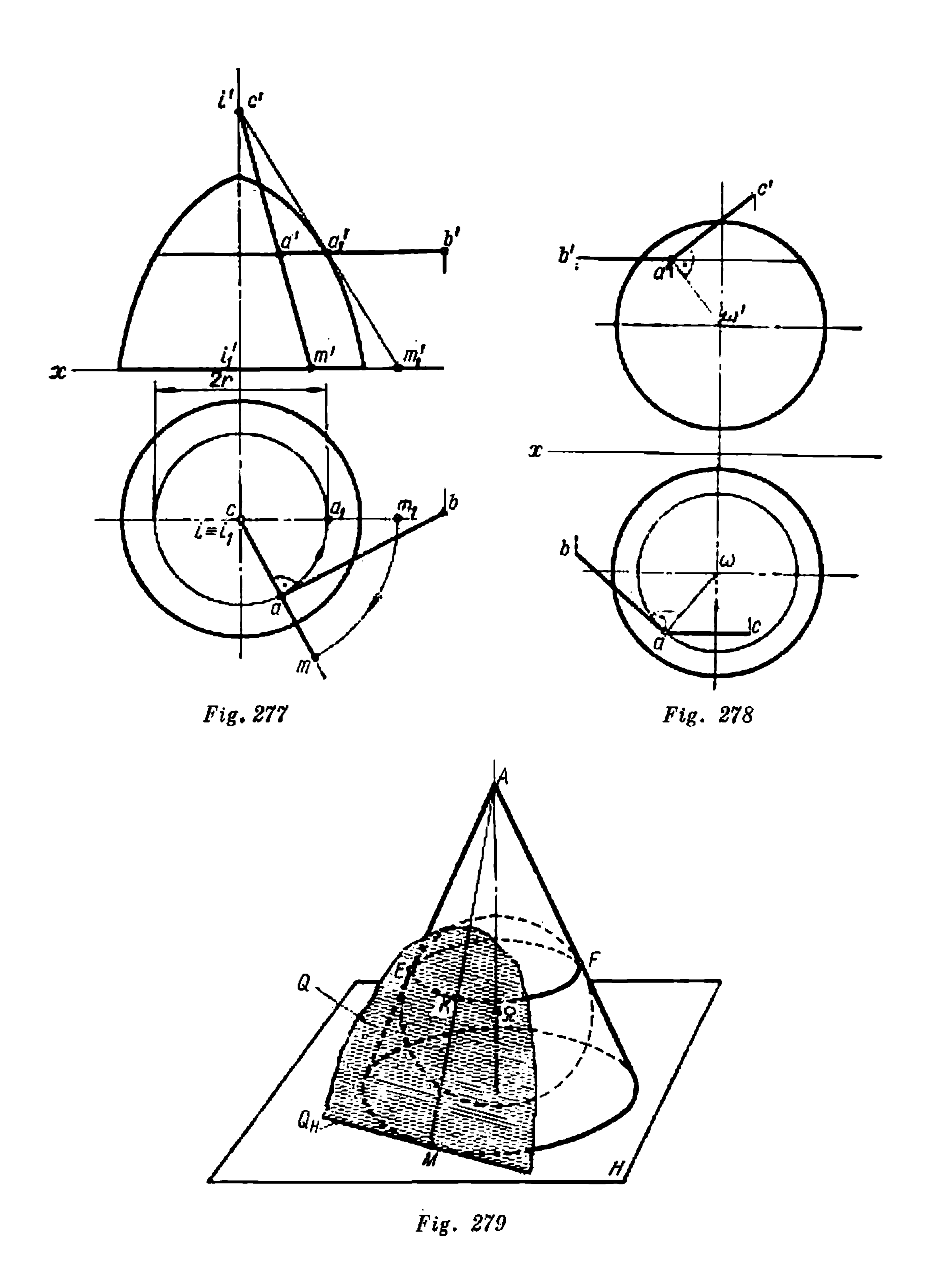


Fig. 277

Fig. 278

Fig. 279

Le point A est un point par lequel on peut mener un nombre infini de droites tangentes à la sphère. Le lieu géométrique de ces tangentes est une surface conique dont le sommet est en A. Cette surface conique est circonscrite à la sphère et la courbe de contact est la circonférence $EKFE$. Un plan quelconque Q tangent au cône est en même temps en contact avec la sphère. En effet, la sphère et le plan Q dont la ligne de contact avec le cône est la génératrice AM n'ont qu'un seul point commun K qui est le point de contact. Le problème admet ainsi un nombre infini de solutions. Les plans cherchés se trouvent aisément lorsque la droite qui joint le point A et le centre de la sphère Ω est perpendiculaire à l'un des plans de projection. Si $A\Omega$ est une droite quelconque, il est nécessaire de transformer l'épure de façon que l'une des projections de la droite $A\Omega$ devienne un point. La solution est donnée par la construction d'un plan tangent au cône de révolution auxiliaire.

INTERSECTION DES SURFACES COURBES

§ 50. Méthode générale de construction de la ligne d'intersection des surfaces

Pour construire les points de la ligne cherchée, on coupe les deux surfaces données F_1 et F_2 par une troisième surface Φ (fig. 280), puis on construit les courbes f_1 et f_2 suivant lesquelles la surface auxiliaire Φ coupe F_1 et F_2. Le point (ou les points) d'intersection K de ces courbes appartient à la ligne d'intersection recherchée des surfaces données. Cette ligne est dite souvent raccordement. En reprenant les constructions déjà décrites avec plusieurs surfaces auxiliaires on détermine ceux des points de la courbe qui rendent aisée l'exécution de son tracé. De plus, les surfaces sécantes auxiliaires sont choisies de manière que les lignes f_1 et f_2 soient simples et commodes à mener (droites et circonférences). Le choix des surfaces auxiliaires est guidé par le type des surfaces données et par leur position relative. Le plus souvent on recourt aux plans et aux sphères.

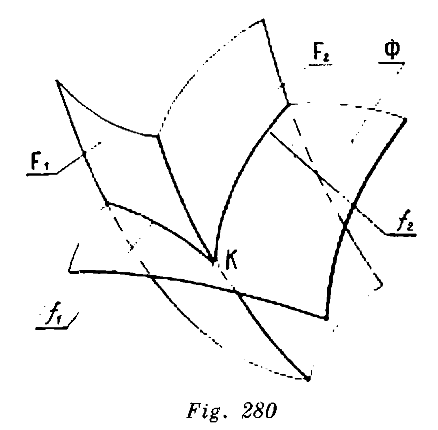


Fig. 280

§ 51. Intersection des surfaces réglées

Pour construire la ligne de raccordement des surfaces coniques et cylindriques, il est avantageux de choisir comme plans auxiliaires des plans sécants simples dont l'intersection avec un cône ou un cylindre a lieu suivant les génératrices.

Dans le cas de l'intersection de deux cônes (fig. 281), les plans sécants auxiliaires sont menés par la droite S_1S_2 qui joint les sommets des cônes. Chacun de ces plans passant par S_1S_2 coupe les cônes donnés ou leur est tangent suivant des génératrices. Les points *I*, *II*, *III*, *IV* d'intersection des génératrices appartiennent à la ligne cherchée. Tous les plans sécants qui permettent de déterminer les points de cette ligne forment un faisceau dont l'axe est constitué par la droite S_1S_2. Les traces horizontales des plans sécants simples passent par la trace M de même indice de cet axe.

Lorsqu'on construit la ligne de raccordement d'un cône et d'un cylindre (fig. 282), les plans auxiliaires passant par le sommet du cône parallèlement aux génératrices de cylindre sont des plans sécants

simples. La droite SM, axe du faisceau, doit satisfaire aux mêmes conditions. La figure 282 représente un des plans du faisceau, le

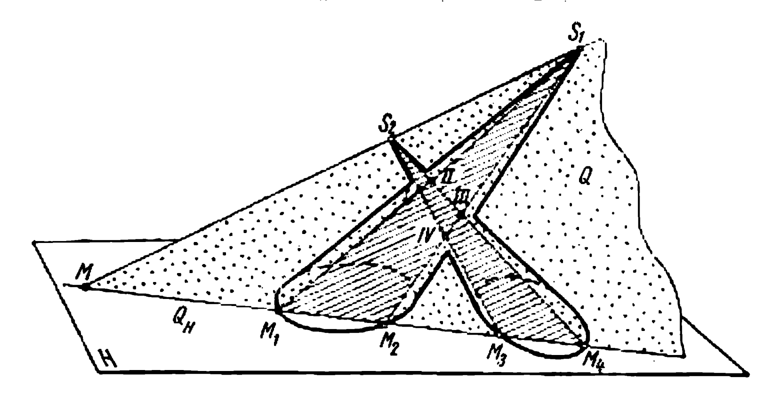


Fig. 281

plan Q, dont la trace horizontale Q_H passe par le point M. Les points I, II, III, IV se trouvent sur l'intersection des génératrices respectives.

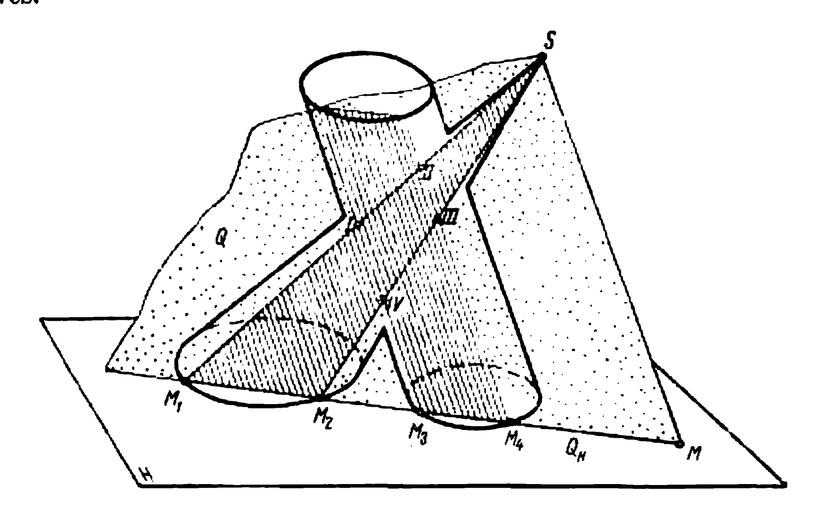


Fig. 282

Enfin, dans le cas de l'intersection de deux cylindres (fig. 283), les plans sécants auxiliaires doivent être parallèles aux génératrices du premier de même qu'à celles du deuxième cylindre. La direction

des traces des plans sécants simples est déterminée par le plan directeur. Ce plan Q est défini par deux droites concourantes KM et KM_0 respectivement parallèles aux génératrices du premier et du deuxième cylindre. Les plans sécants simples doivent être parallèles à Q. L'un d'eux, Q_1, est représenté sur la figure 283.

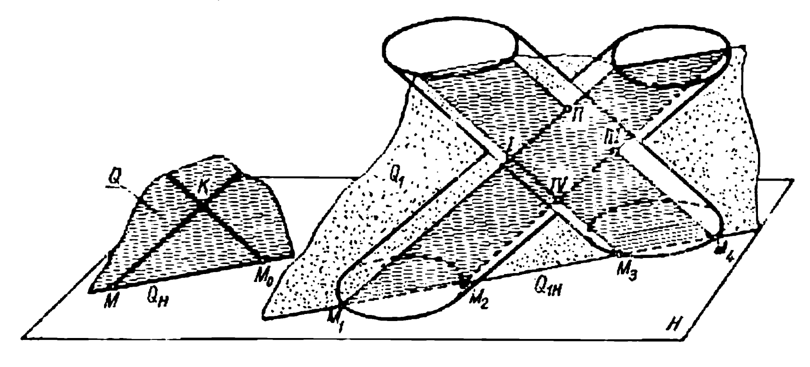


Fig. 283

Lorsque les surfaces réglées considérées ne sont pas coniques ni cylindriques, il faut, pour construire la ligne recherchée, trouver les points d'intersection des génératrices rectilignes d'une surface avec l'autre.

§ 52. Intersection des surfaces de révolution

1. Intersection de deux surfaces de révolution coaxiales (fig. 284). Supposons que le méridien d'une des surfaces considérées soit une courbe, et le méridien de l'autre, une droite. Le point K d'intersection des méridiens, lors de leur rotation autour de l'axe commun, décrit une circonférence. Cette circonférence est un parallèle commun aux deux surfaces de révolution ; il constitue leur ligne d'intersection.

2. Intersection des surfaces de révolution aux axes concourants. La figure 285 donne les projections des surfaces F_1 et F_2 sur le plan V parallèle à leurs axes. Il faut ici employer comme surfaces auxiliaires des sphères de centre commun Ω, point d'intersection des axes. Chacune des sphères auxiliaires étant alors coaxiale à F_1 et F_2 coupe ces surfaces suivant des circonférences dont les projections sur V sont des droites. Sur la figure 285, les droites $a_1'b_1'$ et $c_1'd_1'$ sont les projections frontales des parallèles suivant lesquels la sphère de rayon R_1 coupe F_1 et F_2. Les points $4'$ et $4_1'$ d'intersection des projections des parallèles ainsi construits appartiennent à la projection de la ligne cherchée. D'une manière analogue on trouve les points $3'$

et $3'_1$. Il faut noter seulement que la droite $a'_0b'_0$ est une projection sur V de la ligne de contact de la surface F_1 et de la sphère de rayon R_0. L'intersection des méridiens principaux détermine les points extrêmes $1'$ et $2'$. La figure 285 montre comment, à l'aide des projections

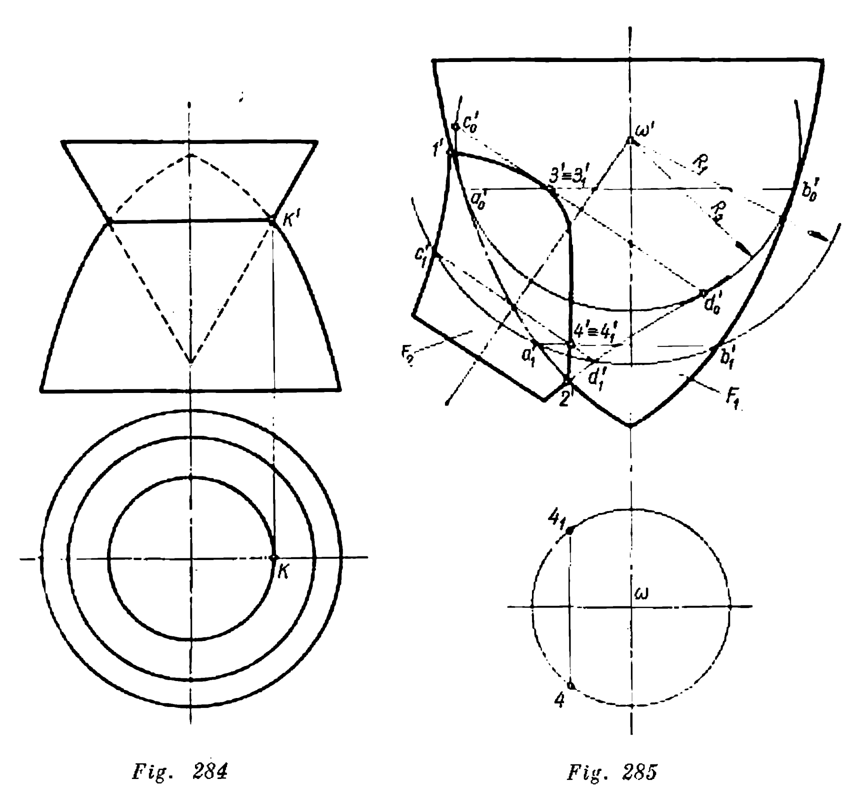


Fig. 284 *Fig. 285*

horizontales des parallèles de la surface F_1, on peut construire les projections horizontales des points trouvés (voir les projections horizontales des points IV et IV_1).

Un exemple d'intersection des surfaces de révolution réglées dont les axes se situent dans le même plan est donné sur la figure 286. Les surfaces auxiliaires y sont constituées par des sphères dont chacune coupe les surfaces données du cône et des cylindres suivant des circonférences (parallèles). Sur la figure 286, la notation des projections des circonférences est la suivante: $a'_0b'_0$ est la projection des deux circonférences de contact de deux sphères de rayon R_0 et du cylindre horizontal; $a'_1b'_1$ et $a'_2b'_2$ sont les projections des parallèles suivant lesquels les sphères auxiliaires de rayons R_1 et R_2 coupent

ce même cylindre ; $c'_0d'_0$, $c'_1d'_1$, $e'_0f'_0$ et $e'_1f'_1$ sont les projections des circonférences suivant lesquelles les sphères coupent le cône et le cylindre oblique. Ces droites qui se coupent deux à deux déterminent les points des projections frontales des lignes cherchées. Pour construire le point supérieur *10'* de la ligne d'intersection des deux cylindres il a fallu faire appel aux projections de profil du cylindre horizontal et de la génératrice *MN* du cylindre oblique.

La ligne d'intersection des corps représentés sur la figure 286 aurait pu être construite également d'une autre manière, en employant

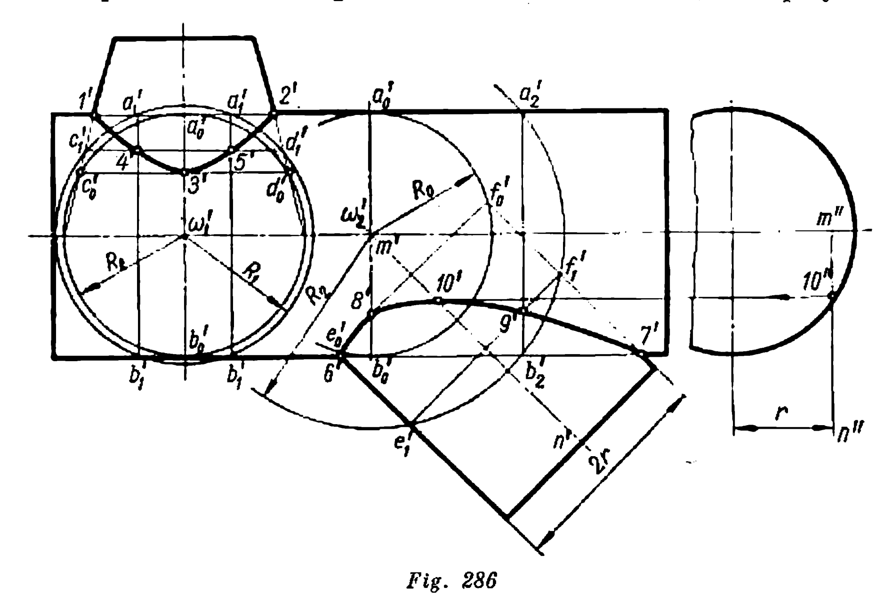


Fig. 286

pour un couple de corps des plans horizontaux et pour l'autre couple, des plans frontaux. A chaque point trouvé (à l'exception des points *1'*, *2'*, *6'* et *7'*) correspond un autre point invisible des cylindres et du cône.

La méthode des sphères auxiliaires peut être appliquée également dans le cas où l'une des surfaces de révolution données est une sphère.

La figure 287 représente les projections frontales d'une partie de la sphère de rayon R et de la surface de révolution d'axe II_1. Dans le cas considéré le plan déterminé par le centre de la sphère C et l'axe II_1 est parallèle au plan de projection V. Puisque deux sphères quelconques sont toujours coaxiales, le centre des surfaces sphériques auxiliaires peut se trouver en un point quelconque Ω de l'axe II_1.

La sphère auxiliaire de rayon ρ coupe les surfaces données suivant des circonférences dont les projections sur V sont les droites $a'b'$

et $e'f'$. Les points III et III_1 d'intersection de ces circonférences appartiennent aux surfaces données, et donc à la ligne recherchée.

Si l'axe II_1 d'une surface de révolution coupant la sphère considérée est perpendiculaire à l'un des plans de projection (fig. 288), les surfaces auxiliaires peuvent être prises parmi les plans perpendiculaires à l'axe II_1. Un tel plan T est représenté sur la figure 288.

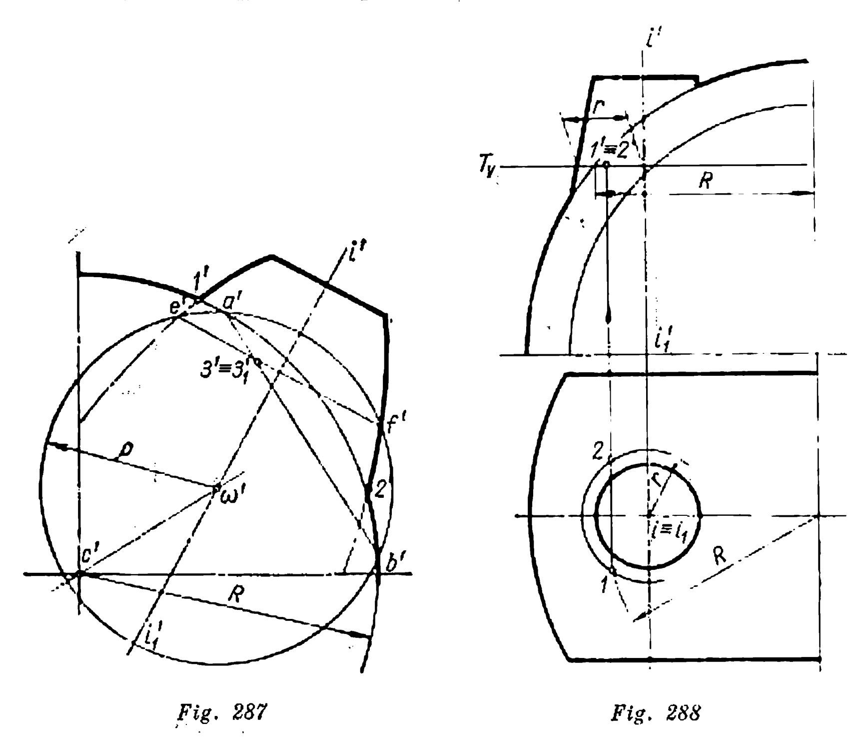


Fig. 287

Fig. 288

Le plan T coupe le cône et la sphère suivant des circonférences de rayons r et R. Les deux circonférences sont projetées sur H en vraie grandeur.

Leurs points d'intersection (I et II) appartiennent à la ligne cherchée. Cette méthode est employée généralement pour construire la ligne de raccordement d'un bossage conique et d'une surface sphérique de chapeau de palier (fig. 289).

La figure 290 donne un exemple d'intersection d'une sphère avec un cylindre. Ici on cherche avant tout les points de repère I et II des génératrices de contour du cylindre. A cet effet on mène par l'axe du cylindre un plan auxiliaire U_1 parallèle à V. Le plan U_1 coupe le cylindre suivant des génératrices de contour, et la sphère,

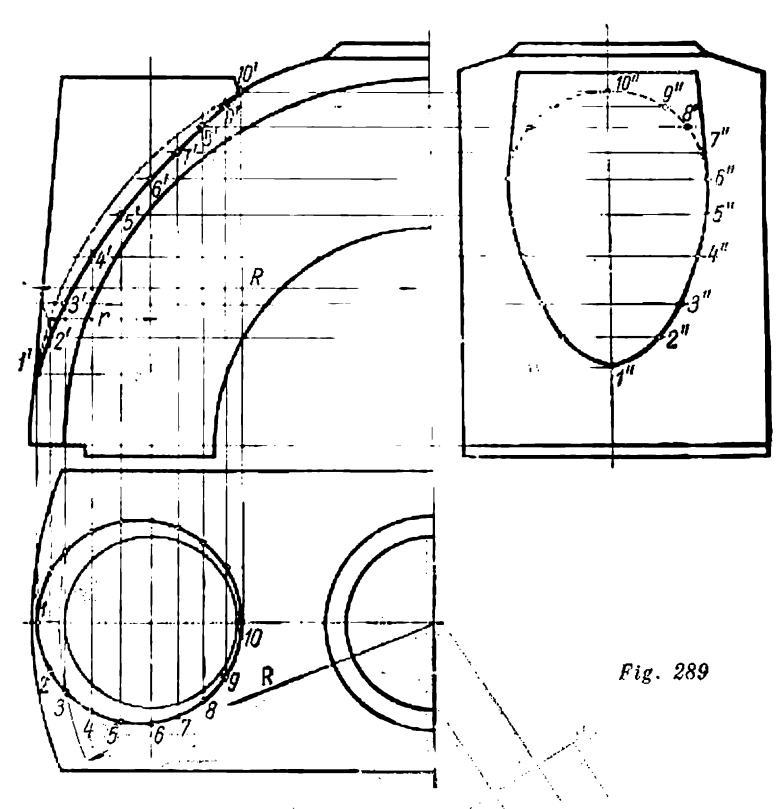


Fig. 289

suivant la circonférence de rayon ρ_1. Cette dernière se projette sur V en vraie grandeur et coupe les projections frontales des génératrices extrêmes du cylindre en déterminant les points $1'$ et $2'$.

On trouve ensuite sur le méridien principal de la sphère les points III et IV. Un changement de plans de projection des surfaces données permet de construire les points le plus haut et le plus bas (V et VI).

Le nouveau plan V_1 est parallèle à Q, plan de symétrie des deux surfaces données. C'est justement dans ce plan Q se situent les points le plus bas et le plus haut symétriques à eux-mêmes. Les points courants de la ligne de raccordement s'obtiennent à l'aide des plans parallèles à V.

3. Intersection des surfaces de révolution dont les axes ne reposent pas dans le même plan. Le choix des surfaces auxiliaires et leur orientation par rapport aux plans de projection dépend dans ce cas des conditions du problème concret. Ainsi, lorsque l'axe d'une surface de révolution non réglée est perpendiculaire à H, et l'axe

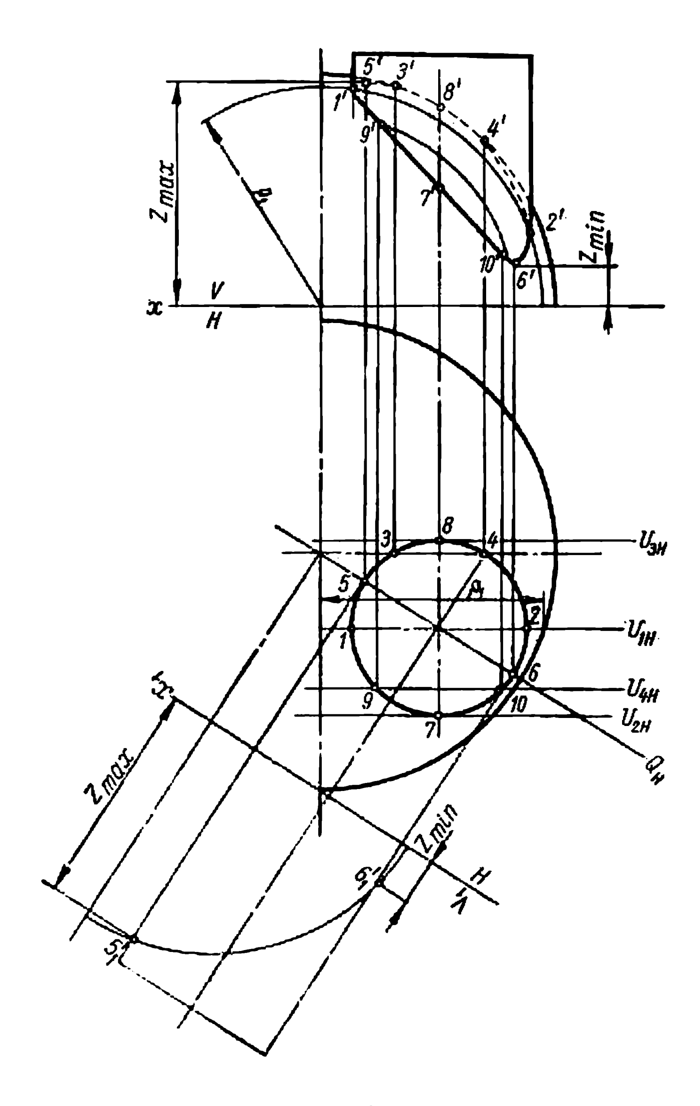

5'
3'
8'
1'
9'
4'
7'
2'
10'
6'
Z max
Z min
x
V
H
3
8
4
U3H
5
2
1
U1H
6
U4H
9
10
U2H
7
QH
Z max
Z min
6'
5'
H
V

Fig. 290

du cylindre qui la coupe est horizontal, il convient de choisir comme surfaces auxiliaires des plans horizontaux T_1, T_2 et T_3 (fig. 291). Chacun de ces plans rencontre la première surface suivant un parallèle (circonférence), et la deuxième suivant des droites (génératrices). Les points d'intersection des circonférences et des

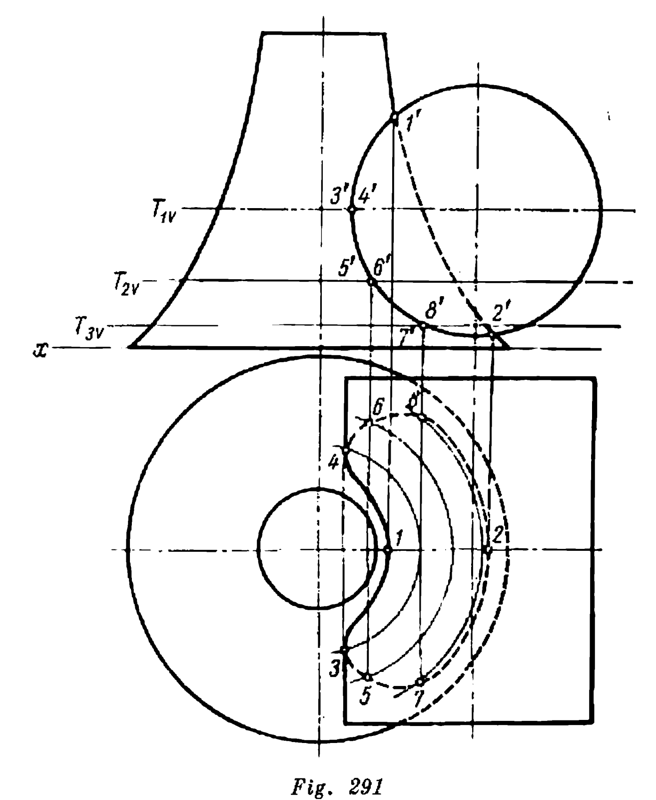


Fig. 291

droites contenues dans le même plan déterminent la ligne de raccordement recherchée.

La figure 292 représente l'intersection d'un prisme triangulaire avec une sphère de rayon R.

La base supérieure du prisme est coupée par la sphère suivant l'arc DE d'une circonférence de rayon R_1.

La face latérale BC est coupée suivant l'arc DIF, et la face latérale CA, suivant l'arc FKE. Les points qui déterminent les lignes d'intersection du prisme avec la sphère s'établissent à l'aide des plans horizontaux auxiliaires (les points K et I, par exemple, à l'aide du plan T).

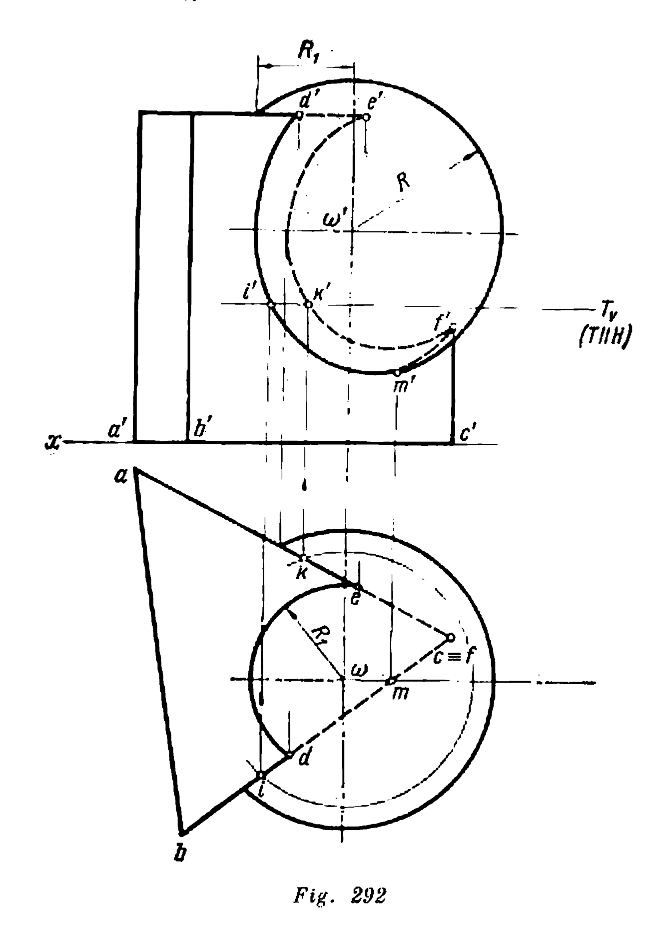


Fig. 292

§ 53. Cas particulier de l'intersection de surfaces du second degré

On appelle surface du second degré une surface déterminée dans un système de coordonnées cartésiennes par une équation algébrique du second degré. Les surfaces du second degré sont la sphère, l'ellipsoïde, le paraboloïde, l'hyperboloïde (à une et à deux nappes), le paraboloïde hyperbolique, les cônes et les cylindres dont les directrices sont des courbes du second degré.

Il arrive souvent en pratique que deux surfaces du deuxième degré qui se coupent sont tangentes à une troisième surface également du second degré. Pour construire alors la ligne de raccordement, on applique le théorème de Monge suivant lequel *deux surfaces*

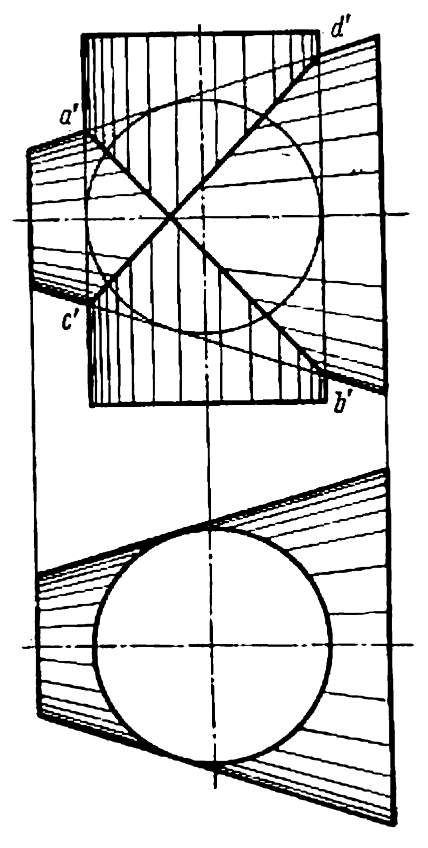


Fig. 293

du second degré inscrites dans une troisième, également du second degré, ou circonscrites à celle-ci se coupent suivant deux courbes planes.

Conformément à ce théorème, les lignes d'intersection d'un cône et d'un cylindre circonscrits à une sphère sont des courbes planes (ellipses). Sur la figure 293 leurs projections frontales sont représentées par les droites $a'b'$ et $c'd'$.

CONSTRUCTION DES DÉVELOPPEMENTS

54. Développement des polyèdres

On appelle développement d'une surface polyédrique la figure plane obtenue par la juxtaposition de toutes ses faces sur un plan.

1. Développement d'une pyramide. Les faces latérales d'une pyramide forment des triangles; pour les construire il suffit de déterminer les vraies grandeurs de leurs côtés que sont les arêtes de la pyramide. Dans le cas de la figure 294, la base de la pyramide se situe dans le plan H, et c'est pourquoi il n'est besoin de déterminer que les grandeurs des arêtes latérales, ce qui est réalisé par la méthode de la rotation. Les vraies grandeurs des arêtes latérales sont désignées par l_{SA}, l_{SB} et l_{SC}. On construit ensuite d'après les trois arêtes le contour d'une face à laquelle on juxtapose la face suivante, etc. Le développement s'achève par la figuration de la base de la pyramide (triangle ABC) qu'on peut tracer adjacente à une face quelconque. La construction est nettement plus simple lorsque la pyramide est régulière. Toutes les faces latérales d'une telle pyramide sont alors des triangles isocèles. Dans nombre de cas il est nécessaire de numéroter sur le développement les points appartenant à la surface de la pyramide donnée. Un problème analogue se pose lorsqu'il faut construire sur le développement la ligne d'intersection de la pyramide avec un plan, un autre polyèdre ou une surface courbe.

Soit un point K situé sur la face SAC. Montrons comment ce point est « transposé » sur le développement. On mène sur la face SAC une droite qui joint K au sommet de la pyramide S. Pour reporter cette droite sur le développement, il faut connaître la position sur le développement de deux points de cette droite. Ces points sont le sommet S de la pyramide et le point M, situé sur l'arête de la base AC. Le point M sur le développement se construit à l'aide d'un segment de longueur l. Il reste à trouver la distance du point K au sommet S, c'est-à-dire le segment l_{SK}, et à le reporter sur le développement à partir du point S le long de la droite auxiliaire SM. Il est encore plus simple de déterminer sur le développement les points appartenant aux arêtes, c'est-à-dire les points où $l = 0$ (par exemple, le point N).

2. Développement d'un prisme. En premier lieu il faut déterminer la vraie grandeur des faces du prisme constituées par des parallélogrammes. Les méthodes de la géométrie descriptive permettent de transformer les projections d'un parallélogramme quelconque pour obtenir la figure 295, c'est-à-dire de façon que ses deux côtés opposés AB et CD soient parallèles à H, et les deux autres, AD et BC, parallèles à V.

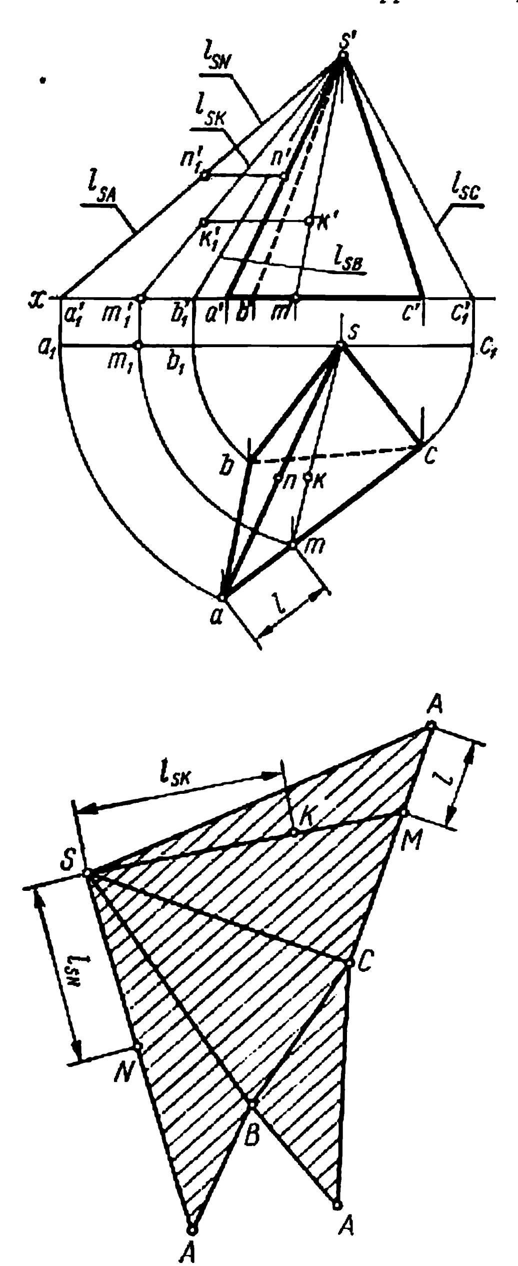

s'
l_{SN}
l_{SK}
n'_1
n'
l_{SA}
l_{SC}
k'
k'_1
l_{SB}
x
a'_1
m'_1
b'_1
a'
b'
m'
c'
c'_1
s
a_1
c_1
m_1
b_1
b
c
n
k
m
a
l
A
l_{SK}
K
M
S
C
l_{SN}
N
B
A
A

Fig. 294

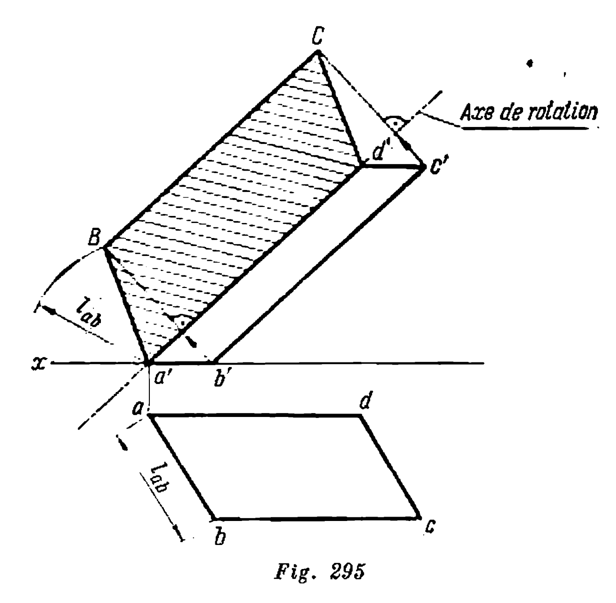


Fig. 295

Alors le parallélogramme peut être tourné autour d'un de ses côtés comme sur une charnière pour le rendre parallèle à celui des plans de projection qui est parallèle à l'axe de rotation. Sur la figure 295 comme axe de rotation on a choisi la frontale AD. Lors de la rotation du parallélogramme, les points b' et c' se déplacent sur l'épure suivant les perpendiculaires à l'axe de rotation, c'est-à-dire à la droite $a'd'$. Quand le plan de la figure est parallèle à V, tous ses côtés se projettent sur V en vraie grandeur.

On en déduit que le sommet B doit être déplacé du point fixe a' à une distance l_{ab} mesurée sur la projection horizontale. Il en est de même pour la position relative des points C et d'. Ainsi en repérant avec un arc de rayon l_{ab} les perpendiculaires qui déterminent le déplacement de b' et c', on obtient les points B et C du contour qui donne la vraie grandeur du parallélogramme.

Considérons maintenant la figure 296 où les projections du prisme triangulaire oblique sont données dans un système V/H. Pour construire le développement, il faut transformer l'épure à l'aide d'une projection frontale du prisme sur le nouveau plan V_1 choisi parallèle aux faces latérales du polyèdre considéré.

Pour réaliser le développement de la surface latérale d'un prisme on peut commencer par la face $ABFE$ dont la construction est analogue à celle de la figure 295. Ensuite, la face $BCGF$ est tournée autour de l'arête BF. A partir des points B et F comme centres on porte des arcs de rayon bc sur les perpendiculaires à l'axe AE, suivant les-

quelles se déplacent les points c_1'' et g_1'. On détermine ainsi sur le développement les sommets C et G. On répète cette opération pour chaque face latérale du prisme. La même figure 296 montre comment on

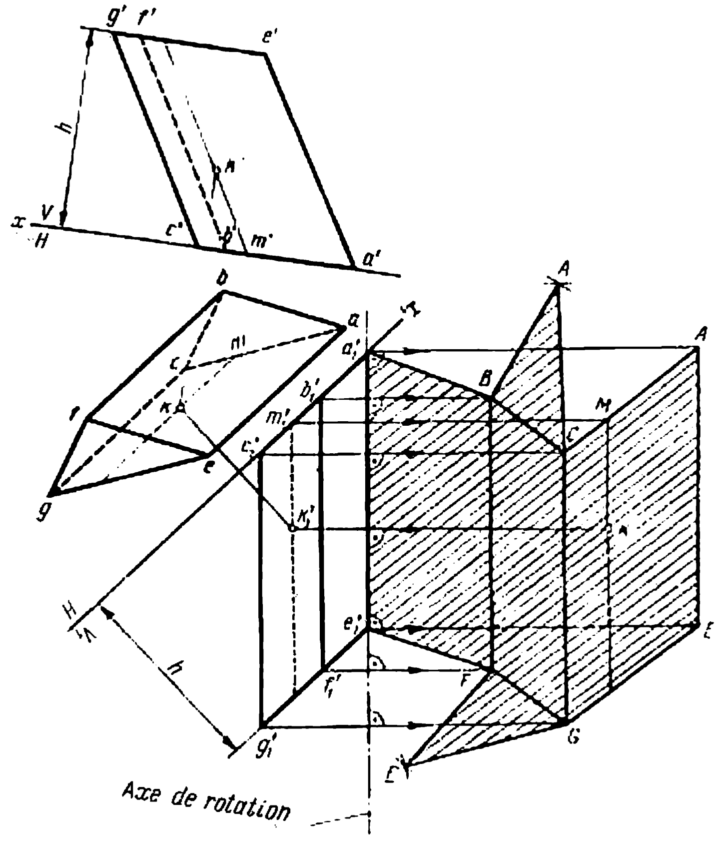


Fig. 296

détermine sur le développement la position d'un point K de la face $ACGE$. A cet effet on mène sur la face par K une droite KM parallèle aux arêtes latérales du prisme. On construit d'abord sur le développement une droite auxiliaire, et ensuite le point donné K.

§ 55. Développements de cônes et de cylindres

Dans le présent paragraphe on n'examine pas les cônes et les cylindres de révolution, dont le développement est donné dans les cours de géométrie élémentaires. Pour construire les développements

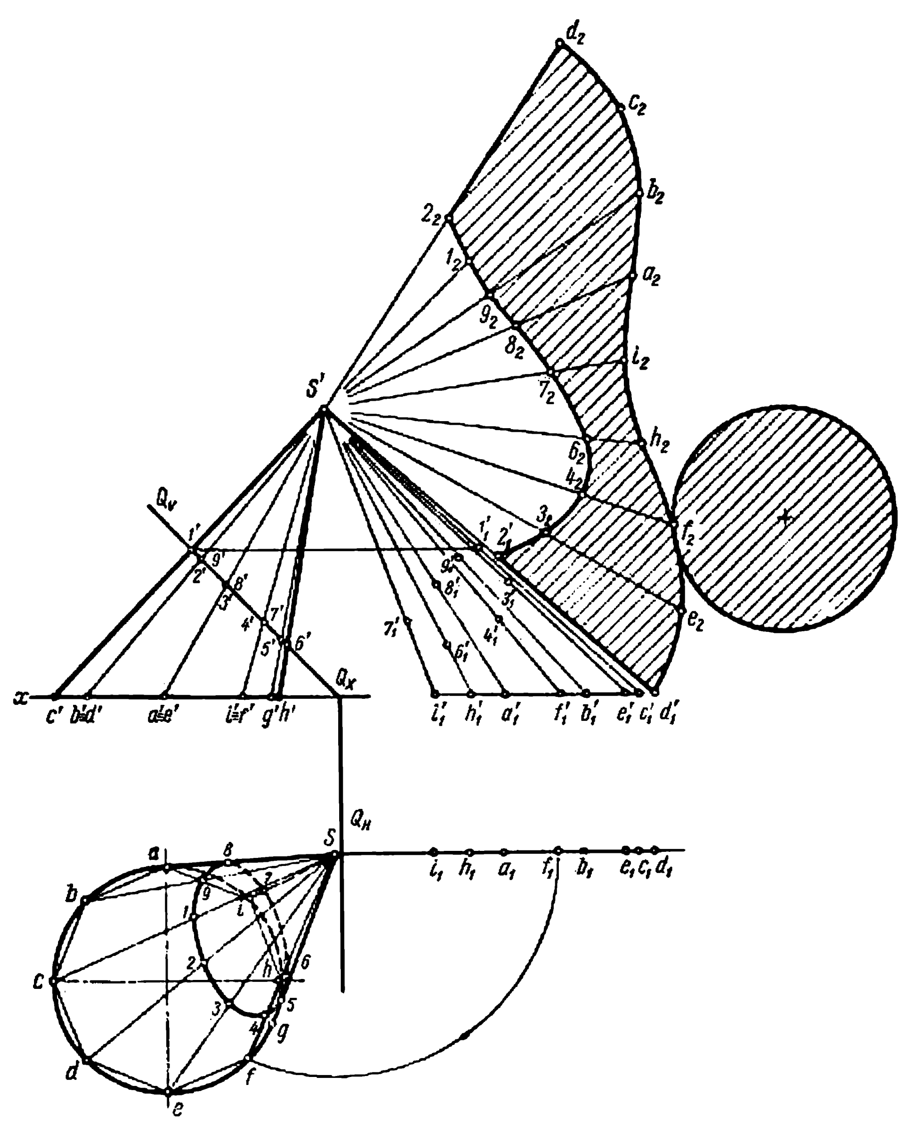


Fig. 297

des cônes et des cylindres obliques ou droits mais non de révolution, il est recommandé de procéder comme suit.

1. Inscrire dans le cône ou le cylindre donné une pyramide ou un prisme à n angles. Le nombre n est déterminé par le format

du dessin. Mais quel que soit le cas, il ne devra pas être inférieur à six.

2. Construire le développement d'une pyramide ou d'un prisme à n angles comme indiqué au § 54.

3. Joindre les extrémités des arêtes sur le développement par des courbes régulières.

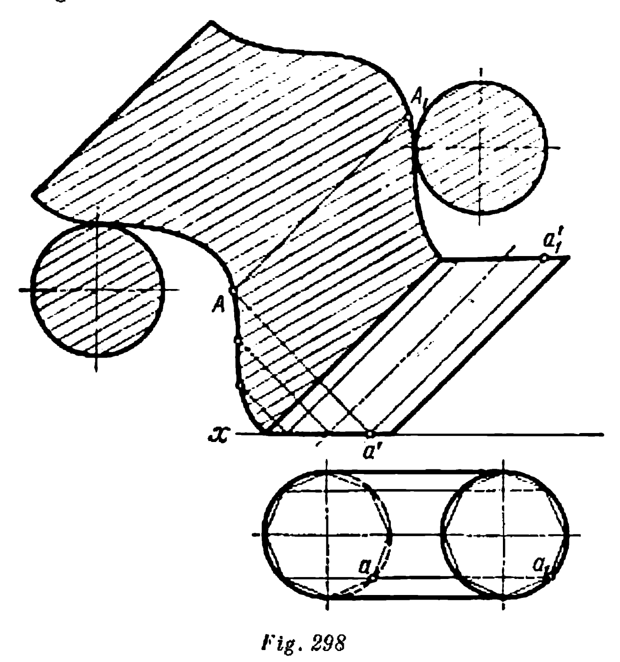


Fig. 298

On obtient ainsi des développements d'un cône ou d'un cylindre sous la forme représentée sur les figures 297 et 298. Le développement du cône montre en plus la ligne d'intersection du cône par le plan Q.

§ 56. Développement d'une sphère

Une surface sphérique n'est pas développable. Les méthodes de développement connues ne donnent que des résultats approchés. Une de ces méthodes consiste à *remplacer un élément de surface sphérique par un élément de surface cylindrique. Un élément de sphère est considéré alors comme délimité par deux grands cercles.*

Soit une sphère (fig. 299) dont la surface est divisée par de grands cercles en plusieurs parties égales (huit, par exemple). Chaque élément de la sphère ainsi formé est projeté sur le plan H sous forme de secteur. On circonscrit ensuite à la sphère une surface cylindrique

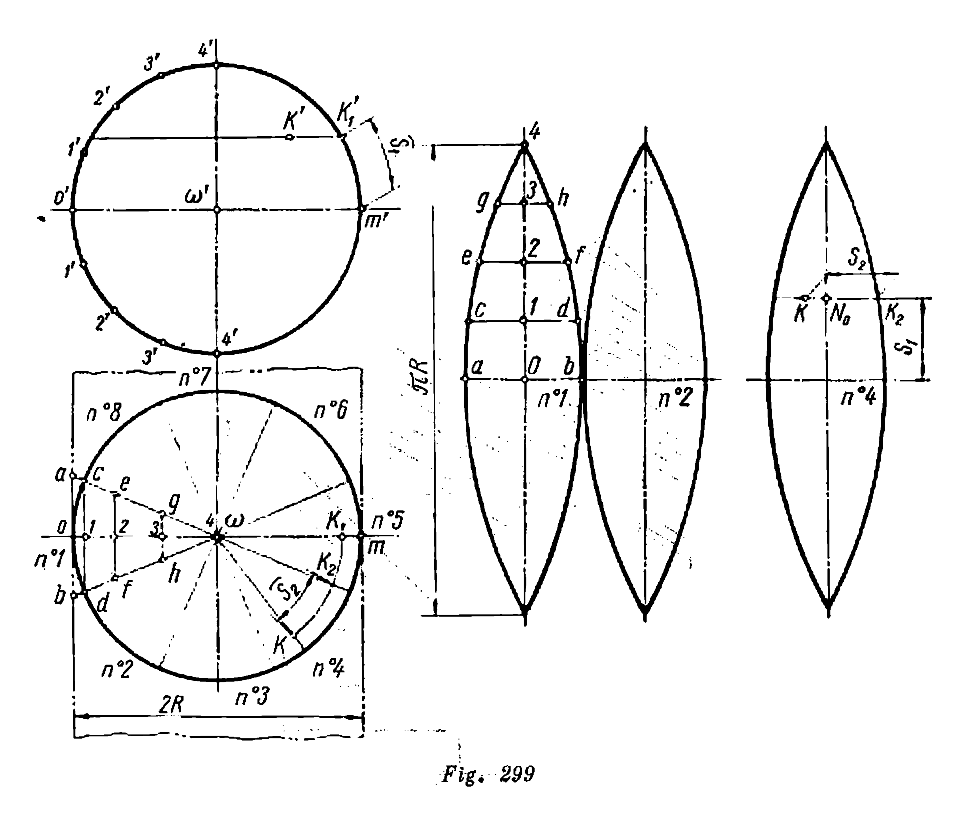


Fig. 299

dont l'axe passe par le centre de la sphère perpendiculairement à V (sur la figure 299, le contour de la surface cylindrique est représenté par un trait mixte).

Un élément de la sphère peut être remplacé avec une précision suffisante pour des buts pratiques par une partie de la surface du cylindre ainsi constitué. La projection horizontale de cet élément cylindrique est le triangle $ab\omega$, et sa projection frontale, le contour de la sphère (arc de circonférence). Pour construire le développement d'un élément cylindrique (fuseau) on divise sa projection frontale en huit parties égales et on construit les projections horizontales des génératrices correspondant aux points de division. Les génératrices d'une surface cylindrique étant parallèles à H, pour construire le développement, les vraies grandeurs des segments des génératrices sont reportées à partir de la projection horizontale (segments *ab*, *cd*, *ef* et *gh*) ; la distance entre eux est mesurée sur la projection frontale (distance entre les points *0'* et *1'*, *1'* et *2'*, etc.). Le développement de trois des huit fuseaux de la surface de la sphère est repré-

senté sur la figure 299 à droite. L'axe de symétrie du fuseau est mené par le milieu du segment *ab*. Quatre segments *0 — 1*, *1 — 2*, etc., sont portés en haut et en bas sur cet axe. Par les points *1*, *2* et *3* on trace des droites horizontales sur lesquelles on porte les segments *cd*, *ef* et *gh*.

En joignant par une courbe régulière les extrémités des segments, on obtient le développement de la moitié supérieure du fuseau. D'une manière analogue on construit sa moitié inférieure. Huit fuseaux de ce type constituent le développement approché de la sphère.

La position d'un point K de la sphère est déterminée sur le développement par deux arcs repères S_1 et S_2.

L'arc S_1 donne le déplacement du point K de l'équateur au pôle. Il est égal à la partie du méridien de la sphère délimitée par l'équateur et le parallèle qui passe par le point K. La longueur de cet arc $S_1 = k_1'm_1'$ est portée sur le développement à partir de l'équateur du fuseau correspondant (n°4 dans notre exemple) suivant l'axe de symétrie vertical. Par le point obtenu N_0 on mène une droite horizontale qui correspond au parallèle sur lequel se situe le point K.

Il reste à porter sur ce parallèle à partir du contour droit du fuseau le segment K_2K égal à l'arc S_2. L'arc S_2 est représenté en vraie grandeur sur la projection horizontale de la sphère. Elle constitue une partie du parallèle qui passe par le point K (du point K au contour du fuseau n°4).

DEUXIÈME PARTIE

PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE, PERSPECTIVE LINÉAIRE ET PROJECTIONS COTÉES

CHAPITRE XII

MÉTHODE DE LA PROJECTION PARALLÈLE SUR UN PLAN

§ 57. Généralités et principes de la méthode

La perspective axonométrique est très usitée, son intelligence étant immédiate et sa construction très simple.

La perspective axonométrique peut se combiner à la projection parallèle (cylindrique) et centrale (conique) à condition que l'objet soit projeté avec son système de coordonnées.

La perspective axonométrique parallèle (cylindrique) consiste en principe à rapporter l'objet à un certain système de coordonnées et à le projeter par des projetantes parallèles sur un plan avec son système de coordonnées.

La figure 300 représente un point A de l'espace rapporté au système de coordonnées cartésiennes $Oxyz$.

Le segment MN détermine la direction de la projection sur le tableau K (plan de projection).

Pour obtenir une perspective axonométrique [1] (parallèle dans notre exemple) du point A on mène par ce point une projetante parallèle à MN, dite fuyante, et on trouve le point A_K de son intersec-

[1] Dans ce qui suit nous donnons le nom de perspective axonométrique à la projection parallèle, tout en retenant que la projection peut être également centrale.

tion avec le plan K. Cette construction montre que lorsque la direction de projection est imposée, à chaque point A de l'espace correspond sur le plan de projection un point défini A_K. On sait que la réciproque n'est pas vraie. En effet, à chaque point A_K du plan K correspond un point quelconque de la fuyante A_KA.

Pour éliminer cette indétermination et établir une correspondance univoque des points de l'espace et des points du tableau, on procède de la manière suivante : on projette sur le plan K non seulement

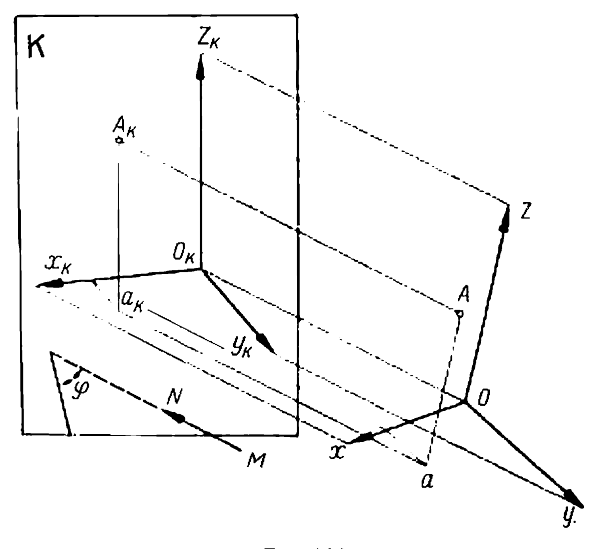


Fig. 300

le point A mais encore l'une de ses projections orthogonales. Il est d'usage de prendre la projection horizontale a sur le plan xOy.

On donne à la perspective axonométrique a_K de la projection horizontale du point A le nom de *projection secondaire*. Ce terme exprime bien le fait que le point a_K s'obtient à la suite de deux projections successives.

L'examen de la même figure 300 permet d'en déduire que dans le cas d'un système de coordonnées $Oxyz$, la direction de la projection MN et du plan K donnés, *la perspective axonométrique du point et sa projection secondaire déterminent d'une manière univoque la position du point dans l'espace*. En effet, si l'on mène par la projection secondaire a_K du point A une droite parallèle à MN, le point où cette droite rencontre le plan de coordonnées xOy détermine la projection horizontale a du point A. Pour ce qui est de la position du point A dans l'espace, elle est déterminée par l'intersection de deux droites

A_KA et aA, dont la première passe par A_K parallèlement à MN, et la deuxième, par a perpendiculairement au plan xOy.

Le plan K (voir fig. 300) contient également la perspective axonométrique des axes de coordonnées, le système plan $O_Kx_Ky_Kz_K$. Dans le cas général, la longueur des segments des axes de coordonnées de l'espace n'est pas égale à la longueur de leurs projections.

La réduction des segments des axes de coordonnées lors de leur projection sur le plan K est caractérisée par le *rapport de réduction.* Ce rapport traduit la relation entre la longueur de la projection du segment de l'axe sur le tableau et sa vraie longueur. Ainsi, le rapport de réduction suivant l'axe O_Kx_K est $s = \frac{O_Kx_K}{Ox}$, suivant l'axe O_Ky_K, $t = \frac{O_Ky_K}{Oy}$ et suivant l'axe O_Kz_K, $u = \frac{O_Kz_K}{Oz}$.

La relation entre les rapports de réduction détermine les trois modifications de perspective axonométrique:

1) *isométrique*, lorsque les rapports de réduction sont les mêmes suivant les trois axes; dans ce cas $s = t = u$;

2) *monodimétrique*, lorsque les rapports de réduction sont égaux suivant deux axes quelconques et diffèrent suivant le troisième axe, c'est-à-dire $s = u \neq t$;

3) *anisométrique*, lorsque les trois rapports de réduction sont tous différents, c'est-à-dire $s \neq t \neq u$; $s \neq u$.

Les projections axonométriques se distinguent également par l'angle φ *compris entre la fuyante et le plan de projection K.* Lorsque $\varphi \neq 90°$, la projection axonométrique est dite *oblique* et lorsque $\varphi = 90°$, elle est dite *orthogonale.*

Il est clair que l'isométrie, la monodimétrie et l'anisométrie peuvent être soit orthogonales, soit obliques.

§ 53. Certaines propriétés de la projection parallèle

Au § 3 nous avons établi les propriétés des positions relatives des points, lignes et figures planes qui restent inchangées lors de leur projection parallèle.

Ces propriétés de la projection parallèle ainsi que la connaissance des rapports de réduction rendent possible la construction de l'image axonométrique du point. Cette image est déterminée comme le point limite d'une ligne brisée composée de segments d'une longueur x_K, y_K, z_K portés à partir de l'origine des axes axonométriques O_K sur des droites respectives parallèles à ces axes (fig. 301) ou confondus avec eux.

La construction de la ligne brisée impose la connaissance des trois coordonnées orthogonales du point x, y, z, la transposition de

celles-ci en coordonnées axonométriques à l'aide des rapports de réduction et l'exécution du dessin de cette ligne qui s'accompagne de la construction d'une des projections secondaires du point.

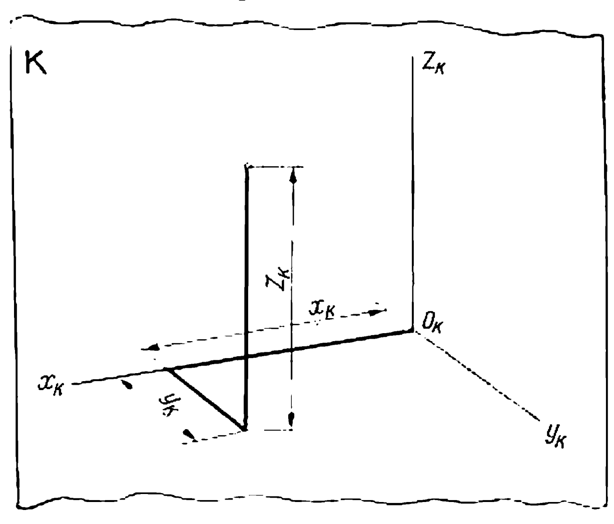


Fig. 301

§ 59. Théorème fondamental de l'axonométrie

Lors de la construction d'une projection parallèle on peut choisir arbitrairement un plan de projection K et la direction de la projection.

Il est clair que tout changement de la position relative des axes et du plan de projection, de même que tout changement de la direction de projection entraîne une modification de la position des axes axonométriques ou des rapports de réduction suivant ces axes.

Voici la conclusion que le géomètre K. Pohlke a tiré en 1853 de l'étude de la relation entre la direction des axes axonométriques et les rapports de réduction suivant ces axes, d'une part, et la position du plan de projection, de l'autre.

Trois segments choisis arbitrairement O_Kx_K, O_Ky_K, O_Kz_K (voir fig. 300) *sur un plan K et issus d'un même point représentent les projections parallèles de trois segments égaux et réciproquement perpendiculaires Ox, Oy, Oz issus d'un certain point de l'espace.*

Ce théorème de K. Pohlke est un théorème fondamental de l'axonométrie et a de nombreuses applications. D'après le théorème de Pohlke, les systèmes des axes axonométriques ainsi que la relation des rapports de réduction suivant ces axes peuvent être parfaitement arbitraires.

Les rapports de réduction sont respectivement proportionnels aux segments qui représentent les axes axonométriques. En effet, les segments O_Kx_K, O_Ky_K et O_Kz_K qui sont les numérateurs des fractions déterminant les rapports de réduction $\frac{O_Kx_K}{Ox}$; $\frac{O_Ky_K}{Oy}$ et $\frac{O_Kz_K}{Oz}$ peuvent être choisis d'après le théorème de Pohlke d'une manière arbitraire. Mais ces trois segments sont les projections parallèles de trois segments de l'espace égaux et réciproquement perpendiculaires. Soit m la longueur de chacun d'eux. Dans la relation $s:t:u = \frac{O_Kx_K}{Ox} : \frac{O_Ky_K}{Oy} : \frac{O_Kz_K}{Oz}$ en substituant Ox, Oy, Oz à m, on obtient

$$s : t : u = O_Kx_K : O_Ky_K : O_Kz_K,$$

ce qui prouve bien que les rapports de réduction des segments respectifs sont proportionnels.

§ 60. Relation entre les rapports de réduction et l'angle de projection

Les rapports de réduction et l'angle φ formé par la direction de la projection avec le plan K sont liés par la relation :

$$s^2 + t^2 + u^2 = 2 + \operatorname{cotg}^2 \varphi. \qquad (1)$$

Pour le démontrer, on fait appel à la figure 302 qui représente un système de coordonnées cartésiennes $Oxyz$ et un plan de projection K. La direction de projection est donnée par le segment OO_K, et dans ces conditions, le point O_K est la projection de l'origine des coordonnées sur le plan K.

Les segments O_KA, O_KB et O_KC sont les axes de coordonnées axonométriques.

L'angle φ compris entre la direction de projection et le plan K est mesuré par l'angle OO_KD. Le côté O_KD de cet angle est la projection orthogonale de la direction de projection OO_K sur le plan K. Le point D est ainsi la base de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées O sur le plan de projection K.

Désignons les angles formés par la direction de projection OO_K avec les axes de coordonnées dans l'espace respectivement par α, β, γ, et les angles formés par la perpendiculaire OD avec ces mêmes axes, par α_1, β_1, γ_1 (sur la figure 302 les angles β_1 et γ_1 ne sont pas notés).

Du triangle OO_KA on tire

$$O_KA^2 = OO_K^2 + OA^2 - 2 \cdot OO_K \cdot OA \cdot \cos \alpha.$$

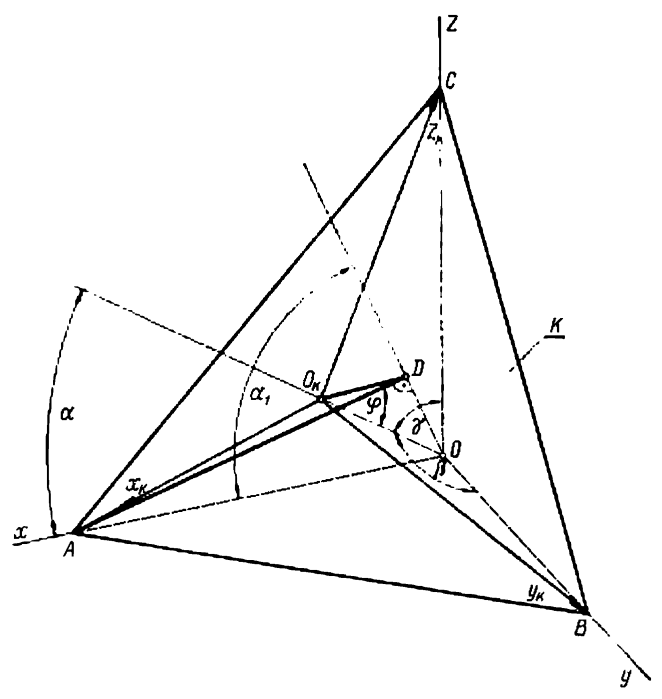


Fig. 302

En divisant les deux membres de l'égalité par OA^2 et en remplaçant $\frac{O_KA}{OA}$ par s, on obtient

$$s^2=\left(\frac{OO_K}{OA}\right)^2+1-2\cdot\frac{OO_K}{OA}\cos\alpha.$$

Transformons à présent le rapport des deux segments OO_K et OA. Notant que dans le triangle rectangle ODO_K $OO_K=\frac{OD}{\sin\varphi}$ et que dans le triangle rectangle ODA $OA=\frac{OD}{\cos\alpha_1}$, on obtient $\frac{OO_K}{OA}=$ $=\frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi}$.

Après avoir substitué cette relation dans la formule de s^2, il vient

$$s^2=\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\varphi}+1-2\frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi}\cos\alpha.$$

D'une manière analogue on peut obtenir les expressions pour les rapports de réduction suivant les axes $O_K y_K$ et $O_K z_K$:

$$t^2 = \frac{\cos^2 \beta_1}{\sin^2 \varphi} + 1 - 2\frac{\cos \beta_1}{\sin \varphi} \cos \beta,$$

$$u^2 = \frac{\cos^2 \gamma_1}{\sin^2 \varphi} + 1 - 2\frac{\cos \gamma_1}{\sin \varphi} \cos \gamma.$$

L'addition des membres gauches et droits des égalités donne

$$s^2 + t^2 + u^2 = \frac{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1}{\sin^2 \varphi} + 3 -$$

$$- 2\,\frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1}{\sin \varphi}.$$

Mais comme la somme des carrés des cosinus directeurs est égale à un, et que l'expression

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1$$

détermine le cosinus de l'angle composé par les segments OO_K et OD et est égale à

$$\cos (90° - \varphi) = \sin \varphi,$$

il vient

$$s^2 + t^2 + u^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} + 1$$

et finalement

$$s^2 + t^2 + u^2 = 2 + \operatorname{cotg}^2 \varphi. \qquad (1)$$

Dans le cas d'une axonométrie orthogonale lorsque $\varphi = 90°$, la somme des carrés des rapports de réduction est égale à 2.

§ 61. Perspective axonométrique normalisée

De tous les modes de perspective axonométrique les normes adoptées en U.R.S.S. recommandent l'isométrie et la monodimétrie orthogonales. Nous avons démontré dans ce qui précède que dans l'axonométrie orthogonale la somme des carrés des rapports de réduction est égale à 2. Mais dans l'isométrie, $s = t = u$, et donc $3s^2 = 2$, d'où l'on tire $s = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$.

Ainsi dans l'isométrie orthogonale les dimensions de l'objet suivant les trois axes sont réduites de 18 %. Les normes préscrivent de construire la projection isométrique sans réduire les dimensions suivant les axes de coordonnées, ce qui correspond à un agrandissement de l'image de $\frac{1}{0{,}82} = 1{,}22$ fois.

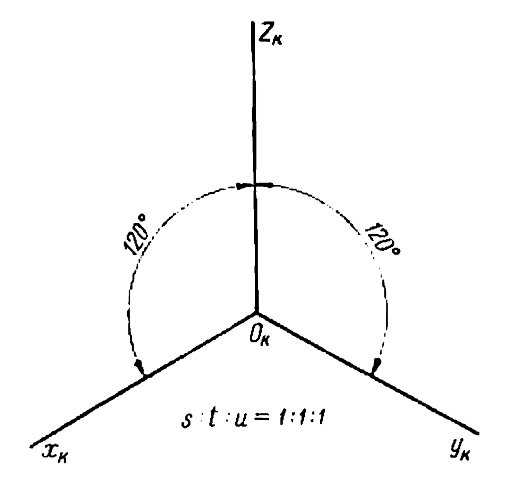


Fig. 303

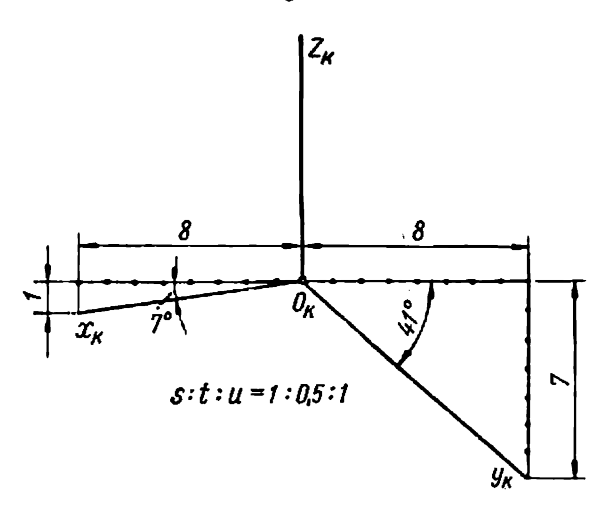


Fig. 304

Pour construire une projection monodimétrique, le coefficient de réduction suivant l'axe $O_K y_K$ est deux fois plus grand que suivant les deux autres axes, c'est-à-dire qu'on pose $s = u$, et $t = 0,5\ s$.

La formule (1) donne alors:

$$2s^2 + (0,5s)^2 = 2,$$

d'où $s^2 = \frac{8}{9}$ et $s \approx 0,94$, alors que $t \approx 0,47$.

En pratique on n'emploie pas dans les constructions de tels rapports fractionnaires, on adopte une échelle d'agrandissement $\frac{1}{0,94} = 1,06$, et alors les rapports de réduction suivant les axes $O_K x_K$ et $O_K z_K$ deviennent égaux à un, et suivant l'axe $O_K y_K$ à 0,5.

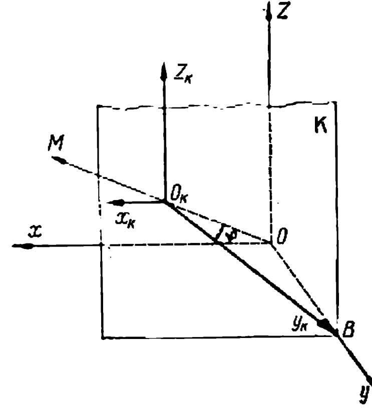


Fig. 305

La position relative des axes dans l'isométrie et la monodimétrie orthogonales est donnée respectivement par les figures 303 et 304.

La détermination des angles formés par les axes et donnés sur ces dessins est liée à la solution de problèmes de géométrie dans l'espace peu compliqués dont nous ne donnons pas l'exposé.

Parmi les projections axonométriques obliques, les normes prévoient l'emploi de la *perspective cavalière.*

Dans ce cas particulier, le plan de projection K (tableau) est pris parallèle au plan de coordonnées xOz (fig. 305). Les axes de coordonnées Ox et Oz, parallèles au plan K, se projettent alors

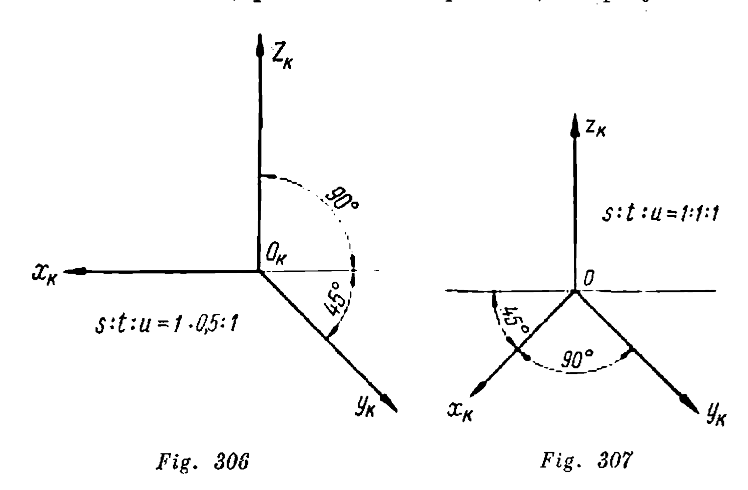


Fig. 306 Fig. 307

sur ce plan en vraie grandeur, et donc les rapports de réduction suivant ces axes sont égaux à un

$$s = u = 1.$$

Le rapport de réduction suivant l'axe $O_K y_K$ est déterminé à partir du triangle OBO_K par la relation

$$t = \frac{O_K B}{OB} = \operatorname{cotg} \varphi,$$

où φ est l'angle compris entre la direction de projection et le plan K.

Ainsi les projections axonométriques obliques sur un plan parallèle à l'un des plans de projection sont des projections monodimétriques. Mais lorsque $\varphi = 45°$ ($\operatorname{cotg} \varphi = 1$), on a une projection isométrique oblique aux rapports de réduction égaux à l'unité.

L'application de la perspective cavalière (fig. 306) est avantageuse lorsqu'on veut représenter en vraie grandeur les figures situées dans les plans parallèles au plan de projection frontal. Mais lorsqu'on veut avoir en vraie grandeur les figures situées dans les plans horizontaux, le tableau (le plan K) est disposé parallèlement au plan H et tous les rapports de réduction sont pris égaux à l'unité (fig. 307).

§ 62. Perspective axonométrique d'une circonférence

L'image d'un cercle obtenue par projection parallèle sur un plan K quelconque (fig. 308) a dans le cas général la forme d'une ellipse.

Quelle que soit la position du plan du cercle, on construit d'abord un parallélogramme $A_K B_K C_K D_K$, projection parallèle du carré $ABCD$ circonscrit au cercle considéré, et puis à l'aide de 8 points et de 8 tangentes on y inscrit une ellipse.

Les quatre premiers de ces points (1_K, 2_K, 3_K, 4_K) sont les milieux des côtés du parallélogramme, et les quatre autres (E_K, F_K, G_K, H_K), les points des diagonales qui divisent les demi-diagonales dans le rapport 7 : 10.

En effet, les propriétés de la projection parallèle permettent d'écrire que $\frac{OE}{OA} = \frac{O_K E_K}{O_K A_K}$.

Mais $\frac{OE}{OA} = \frac{r}{r\sqrt{2}} \approx \frac{7}{10}$, et donc $\frac{O_K E_K}{O_K A_K} = \frac{7}{10}$.

Les tangentes aux points 1_K, 2_K, 3_K et 4_K sont les côtés du parallélogramme, et les tangentes aux points E_K, F_K, G_K et H_K, les droites parallèles aux diagonales correspondantes du parallélogramme. Ainsi la tangente $F_K T_K$ à l'ellipse est parallèle à la diagonale $A_K C_K$, $F_K T_K$ et $A_K C_K$ étant les projections de deux droites parallèles FT et AC.

Les constructions graphiques précédant l'exécution du dessin de l'ellipse elle-même sont données sur la figure 309. Voici le meilleur ordre de leur exécution.

1. Construire la perspective axonométrique du carré qui est le parallélogramme $A_K B_K C_K D_K$ et tracer les diagonales $A_K C_K$ et $B_K D_K$.

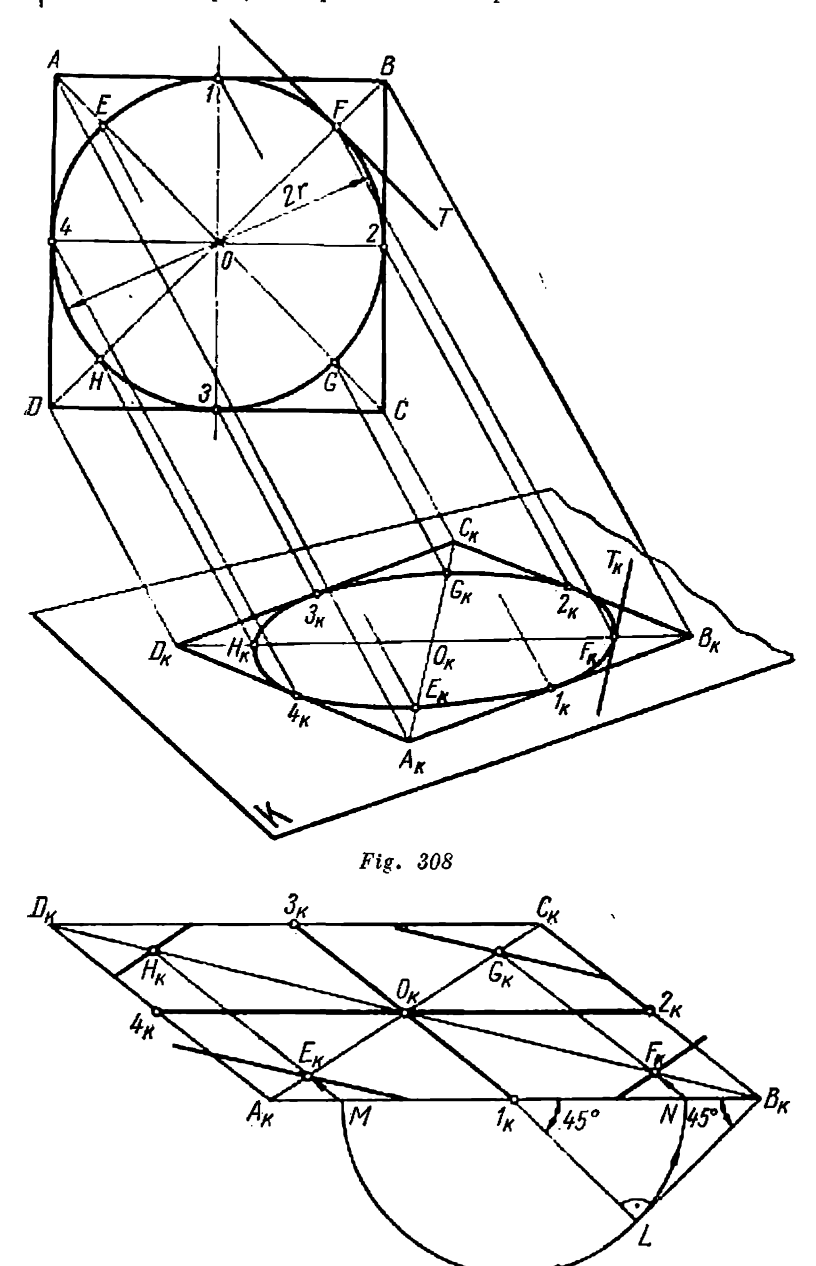


Fig. 308

Fig. 309

2. Désigner les milieux des côtés du parallélogramme (points 1_K, 2_K, 3_K et 4_K).

3. Construire à partir du segment 1_KB_K comme hypoténuse un triangle rectangle isocèle 1_KLB_K.

4. Mener du point 1_K une demi-circonférence de rayon 1_KL qui coupe A_KB_K en M et N. Ces points divisent le segment A_K1_K et le segment 1_KB_K qui lui est égal dans le rapport 7 : 10.

5. Tracer par les points M et N des droites parallèles aux côtés latéraux du parallélogramme et numéroter les points E_K, F_K, G_K et H_K situés sur les diagonales.

6. Construire aux points ainsi établis les tangentes à l'ellipse. Deux tangentes sont parallèles à la diagonale A_KC_K, et les deux autres parallèles à B_KD_K.

Après avoir obtenu ces 8 points et autant de tangentes on peut dessiner l'ellipse avec une précision suffisante.

Dans le cas général, la détermination des axes d'une ellipse est liée aux lois de l'affinité examinées au chapitre « Transformations géométriques » (p. 280). Ce même chapitre donne les modes de construction des demi-axes de l'ellipse.

Maintenant établissons certaines propriétés de la perspective axonométrique orthogonale d'un cercle. Démontrons que *le grand axe de l'ellipse, projection orthogonale du cercle, est perpendiculaire à la projection sur le même plan de la normale au plan du cercle.* Soit un cercle de diamètre d et de centre O (fig. 310), dont le plan P forme avec le plan de projection K l'angle φ, et la normale ON au plan P.

La projection orthogonale du cercle est une ellipse. Son grand axe A_KB_K est la projection de celui des diamètres AB du cercle, qui est parallèle au plan K, c'est-à-dire $A_KB_K = d$. Tous les autres diamètres sont projetés en raccourci.

Considérons l'angle $N_K\widehat{O_K}B_K$. Il représente la projection de l'angle droit $N\widehat{O}B$, dont l'un des côtés est parallèle au plan K ($OB \parallel K$). Cela signifie que $O_KB_K \perp O_KN_K$, le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire à la projection de la normale ON.

Il est aisé de démontrer que *le petit axe C_KD_K de l'ellipse est parallèle à la projection de la normale au plan du cercle.*

En effet, C_KD_K et N_KO_K sont perpendiculaires à A_KB_K, donc $C_KD_K \parallel N_KO_K$.

La longueur du petit axe C_KD_K est égale à $d \cdot \cos \varphi$.

Ainsi,

$$2a = d; \quad 2b = d \cdot \cos \varphi, \tag{2}$$

où $2a$ est le grand axe de l'ellipse, et $2b$ est son petit axe.

Lors de l'exécution des dessins axonométriques on est obligé souvent de construire des cercles dans l'un des plans de coordonnées.

La normale au plan du cercle est alors un axe non situé dans ce plan (« axe libre »). Ainsi, lorsque le cercle est contenu dans le plan xOy, la normale à ce plan est l'axe Oz. D'après cette propriété le grand axe de l'ellipse, projection orthogonale du cercle, est perpendiculaire à $O_K z_K$.

On en déduit que dans ce cas *le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire à celui des axes de coordonnées qui ne se trouve pas dans le plan du cercle.*

Soulignons encore une fois que nous examinons le cas lorsque la perspective axonométrique orthogonale du cercle est tracée dans l'un

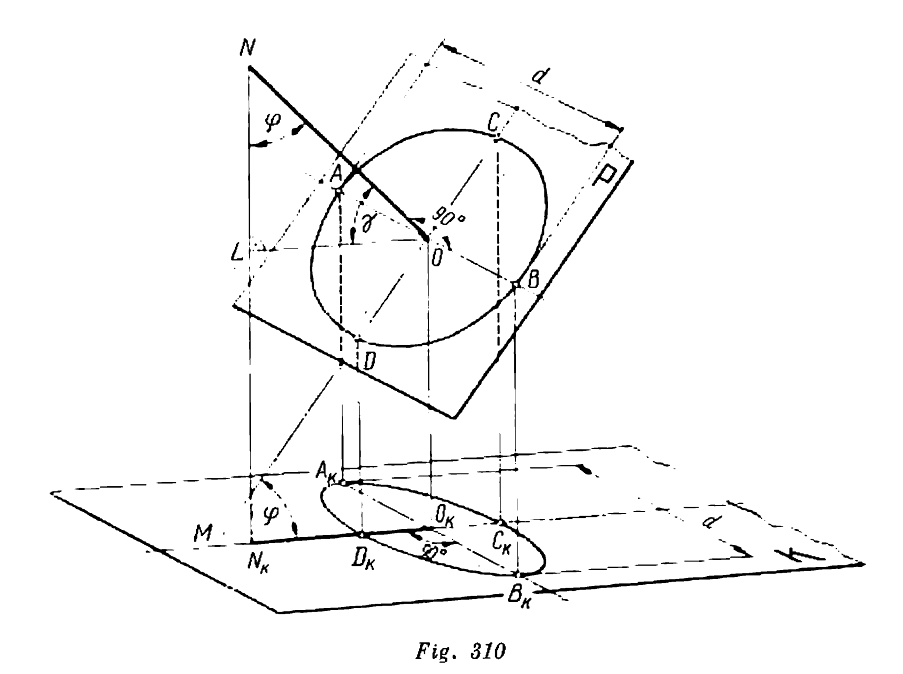


Fig. 310

des plans de coordonnées ou dans un plan parallèle aux plans de coordonnées.

Ainsi, les figures 311 et 312 représentent les ellipses qui constituent les projections isométriques et monodimétriques des circonférences inscrites dans les faces des deux cubes respectivement parallèles aux plans de coordonnées.

Le grand axe de l'ellipse *1* est perpendiculaire à la projection axonométrique z_K de l'axe Oz, c'est-à-dire il est horizontal. Les grands axes des ellipses *2* et *3* sont respectivement parallèles à y_K et x_K. Il reste à déterminer les dimensions des axes. Les formules (2) ne

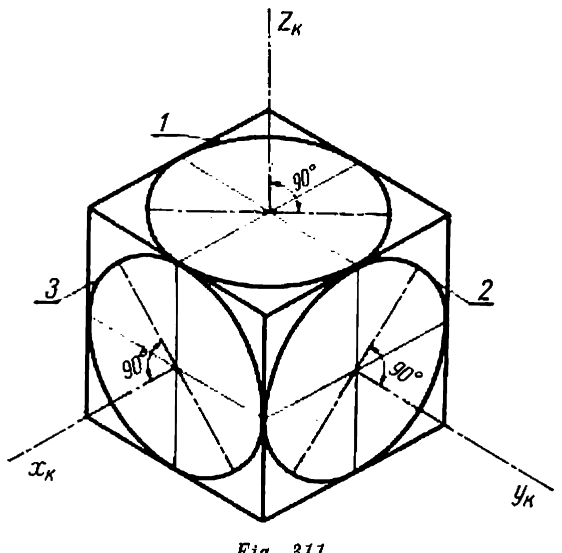


Fig. 311

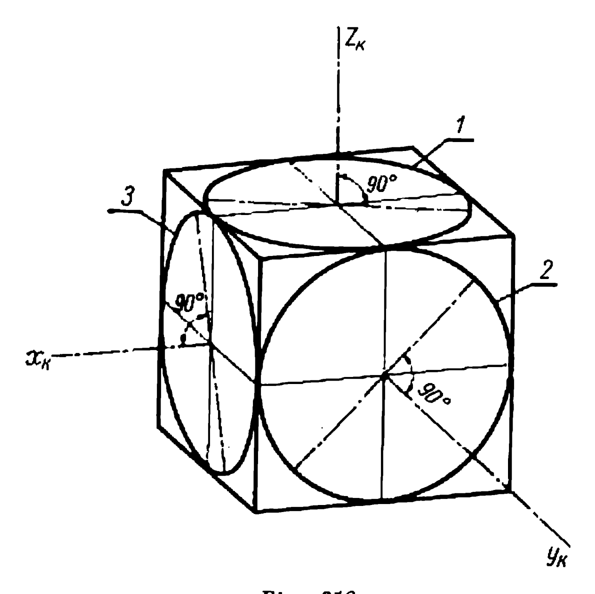


Fig. 312

sont vérifiées que dans le cas où les rapports de réduction justifient la relation $s^2 + t^2 + u^2 = 2$.

Or, en observant les recommandations des normes d'Etat, nous construisons la projection isométrique orthogonale sans recourir à la réduction suivant les axes de coordonnées, ce qui correspond à une image 1,22 fois plus grande que l'objet. Cela signifie que les grands axes des ellipses de la figure 311 doivent être 1,22 fois plus grands que les diamètres des cercles représentés, c'est-à-dire $2a = 1{,}22\,d$.

Il est aisé de démontrer que le petit axe $2b = 0{,}7\,d$. En effet, supposons qu'un des plans de coordonnées, xOy par exemple, se confonde avec le plan P (voir fig. 310). La normale ON est alors parallèle à l'axe non situé dans le plan P, c'est-à-dire $ON \parallel Oz$.

Le rapport de réduction de cet axe u est déterminé par la relation $\frac{O_K N_K}{ON} = \cos\gamma$.

Le triangle rectangle NLO permet de tirer que $\gamma + \varphi = 90°$, d'où $\cos\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\gamma}$.

Puisque dans l'isométrie orthogonale $s = t = u = \sqrt{\frac{2}{3}}$, on a $\cos\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\cos\gamma = u$). En substituant cette valeur au terme correspondant de la formule $2b = d\cos\varphi$, on obtient $2b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$. Compte tenu de l'agrandissement de l'image de 1,22 fois indiqué dans ce qui précède, on a $2b \approx 0{,}7\,d$.

Après avoir effectué les calculs analogues pour une monodimétrie orthogonale (voir fig. 312), on obtient les résultats suivants. Le grand axe de chacune des ellipses *1*, *2*, *3* est pris égal à 1,06 fois le diamètre du cercle représenté. Le rapport des longueurs des axes des ellipses *1* et *3* est 1 :3, et celui des longueurs des axes de l'ellipse *2*, 9 :10.

Pour l'exécution de la construction approximative d'une ellipse à partir des axes imposés, il est recommandé d'utiliser les centres de courbure de ses sommets O_1, O_2, O_3 et O_4 (fig. 313). A cet effet, on mène $AC \parallel OB$, $BC \parallel OA$ et du point C d'intersection des droites AC et BC on abaisse une perpendiculaire à AB.

En prolongeant la perpendiculaire jusqu'à son intersection avec les axes de l'ellipse, on détermine les centres de courbure O_1 et O_2 des sommets A et B. Les propriétés de symétrie centrale de l'ellipse permettent de trouver les points O_3 et O_4. Les arcs de cercle de rayons R_A et R_B sont raccordés à l'aide d'un pistolet suivant le pointillé de la figure 313. Ce mode de construction approchée d'une ellipse assure la symétrie de l'image par rapport aux axes et un écart négligeable de la forme réelle.

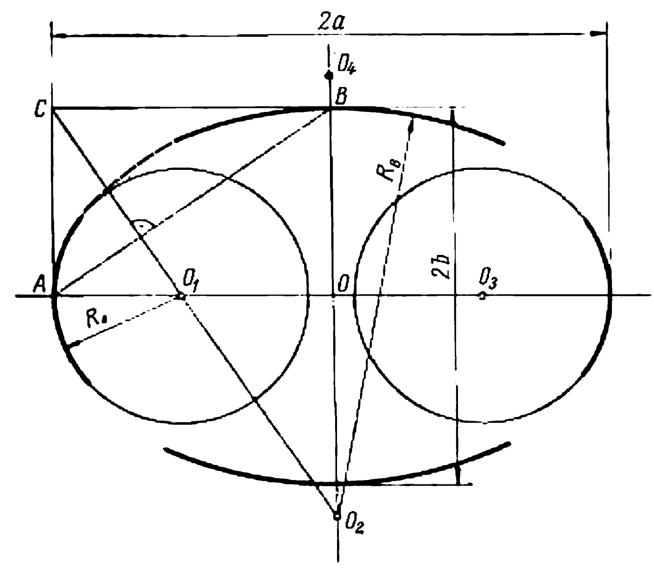


Fig. 313

§ 63. Construction des images axonométriques

Pour passer des projections orthogonales de l'objet à l'image axonométrique, il est recommandé de procéder dans l'ordre suivant.

1. Tracer sur le dessin orthogonal les axes de coordonnées et leur rapporter l'objet considéré. Les axes sont orientés de façon à rendre possible la mesure commode des coordonnées des points de l'objet. Pour construire l'image axonométrique d'un corps de révolution, par exemple, il est avantageux de faire coïncider l'un des axes de coordonnées avec l'axe du corps.

2. Porter les axes axonométriques sur le dessin de sorte qu'ils assurent une intelligence immédiate de l'image et la visibilité de tels ou tels points de l'objet.

La pratique montre qu'en anisométrie orthogonale les meilleures images s'obtiennent lorsque la relation des rapports de réduction est $s:t:u = 0{,}9:0{,}5:1{,}0$. Si la largeur de l'objet est relativement petite, il faut augmenter le rapport de réduction suivant l'axe $O_K y_K$.

En monodimétrie orthogonale de bons résultats s'obtiennent avec la relation des rapports de réduction $1:0{,}5:1$.

3. Construire la projection secondaire, à partir d'une des projections orthogonales de l'objet.

Quel est le plan de coordonnées le plus avantageux pour construire une projection secondaire? Pour résoudre ce problème on se guide

par la simplicité relative des constructions graphiques. La projection secondaire recommandée pour l'exécution est celle qui est la plus simple.

Mais lorsque sur le même dessin axonométrique il faut montrer les ombres, la projection secondaire s'établit sur le plan horizontal $x_K O_K y_K$.

4. Construire l'image axonométrique.

Les échelles des dessins orthogonal et axonométrique peuvent être différentes. Ainsi, pour réaliser la monodimétrie orthogonale ($s:t:u = 1:0{,}5:1$), toutes les dimensions linéaires le long des axes $O_K x_K$ et $O_K z_K$ peuvent être n fois plus grandes ou plus petites, mais les dimensions dans le sens de l'axe $O_K y_K$ doivent être alors augmentées ou diminuées respectivement de 0,5 n fois.

Il est indiqué de commencer le dessin axonométrique par l'exécution de la projection secondaire, c'est-à-dire par la construction de l'image axonométrique d'une figure plane qui est la vue de l'objet, en plan ou de face. C'est pourquoi nous allons examiner avant tout des exemples de construction des images axonométriques de figures situées dans les plans de projection.

Exemple 1. *Construire la projection isométrique orthogonale d'un hexagone régulier ABCDEF* (fig. 314).

Dans ce cas, comme axes de coordonnées on choisit les axes de symétrie Ox et Oy de l'hexagone. Pour construire la projection isométrique à partir du point O_K pris comme origine des axes axonométriques on porte sur l'axe $O_K x_K$ les segments $O_K A_K = O_K D_K = OA$ (les rapports de réduction pour tous les axes sont égaux à l'unité).

Les autres sommets étant symétriques deux à deux par rapport aux axes de coordonnées, on porte à partir du point O_K suivant l'axe $O_K y_K$ les segments $O_K 1_K$ et $O_K 2_K$, égaux entre eux ainsi qu'aux segments $O1$ et $O2$. On mène par les points 1_K et 2_K des droites parallèles à l'axe $O_K x_K$ sur lesquelles on détermine la position des points B_K, C_K, E_K et F_K, en y portant les segments égaux $1_K B_K$, $1_K C_K$, $2_K E_K$, $2_K F_K$ dont les longueurs correspondent à l'abscisse x des sommets B, C, E et F de l'hexagone.

Exemple 2. *Construire la projection monodimétrique orthogonale de la courbe AB située dans le plan xOz* (fig. 315).

L'image axonométrique d'une courbe plane est construite suivant les coordonnées des points isolés. Ainsi sur la courbe donnée AB on marque les points *1*, *2*, *3*, etc., et on détermine leurs coordonnées orthogonales. Sur le dessin axonométrique, tenant compte des rapports de réduction $s = u = 1$, les coordonnées de chaque point de la courbe sont égales aux coordonnées orthogonales.

Passons à la construction de l'axonométrie des objets tridimensionnels.

Exemple 3. *Construire la projection isométrique orthogonale d'un prisme hexagonal tronqué comportant un trou rectangulaire débouchant* (fig. 316).

Sur le dessin orthogonal on porte un système des axes de coordonnées $Oxyz$ dont l'origine se trouve au centre de la base du prisme.

La construction de la projection secondaire a été donnée par l'exemple 1 (construction d'un hexagone régulier).

Notons seulement que l'existence d'un trou rectangulaire débouchant nécessite qu'on montre sur la projection secondaire les deux lignes du contour invisible $a_K b_K$ et $c_K d_K$. On trace ensuite l'image axonométrique du prisme en com-

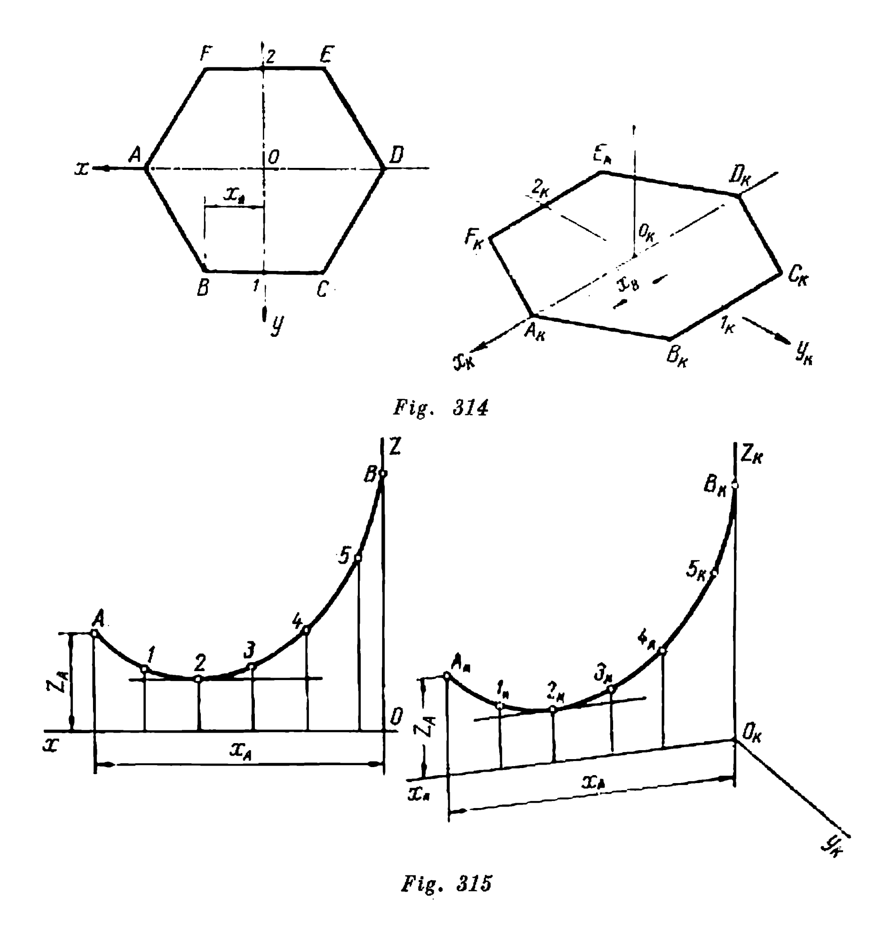


Fig. 314

Fig. 315

mençant par mener des droites verticales par les points 1_K, 2_K, . . ., 6_K, a_K, b_K, c_K, d_K de la projection secondaire. On porte ensuite sur ces droites des segments égaux à z_1, z_2, . . ., z_6, z_A et z_E.

Les points ainsi obtenus (extrémités supérieures des segments verticaux) sont joints par des droites qui assurent la correspondance entre les images orthogonale et axonométrique du prisme.

Sur la figure 316, cette correspondance biunivoque est traduite par les points A et E et le segment qui les joint.

E x e m p l e 4. *Construire la projection monodimétrique orthogonale d'un nœud en béton armé* (fig. 317).

Le dessin orthogonal est disposé suivant les axes de coordonnées de façon que le nœud se situe dans un des octants inférieurs, le IV[e] par exemple. Cette disposition de l'ensemble permet de montrer l'assemblage des poutres avec la colonne et la plaque d'appui. Dans la construction de la projection secondaire et de l'axonométrie du nœud les dimensions linéaires dans le sens des axes O_Kx_K et O_Kz_K ont été doublées, et dans celui de l'axe O_Ky_K conservées. La relation des

Fig. 316

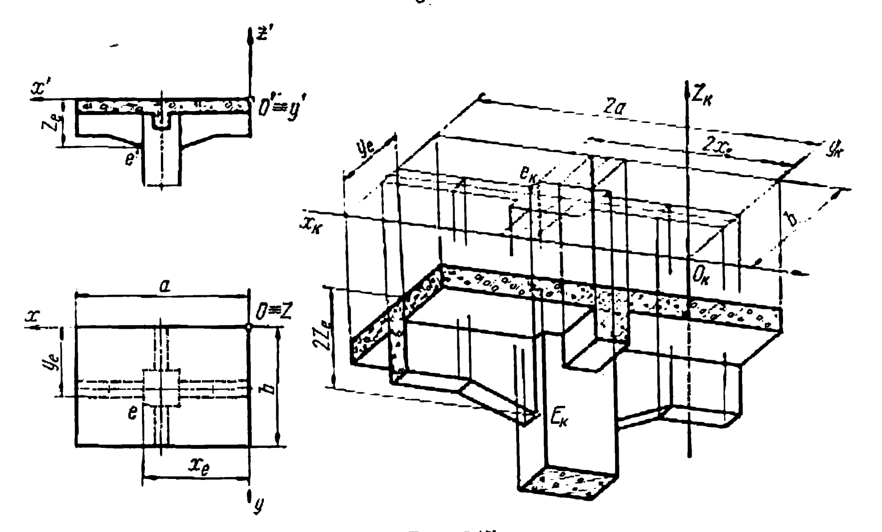


Fig. 317

rapports de réduction imposée par la monodimétrie orthogonale ($s:t:u=$ $=1:0,5:1$) est ainsi observée.

La construction du point E illustre la transformation d'un dessin orthogonal en un dessin axonométrique.

L'image axonométrique du nœud (fig. 317) est légèrement déplacée vers le bas, détachée de la projection secondaire, pour montrer sur le dessin les étapes successives de la construction.

E x e m p l e 5. *Construire la monodimétrie orthogonale d'un cylindre comportant un trou triangulaire débouchant* (fig. 318).

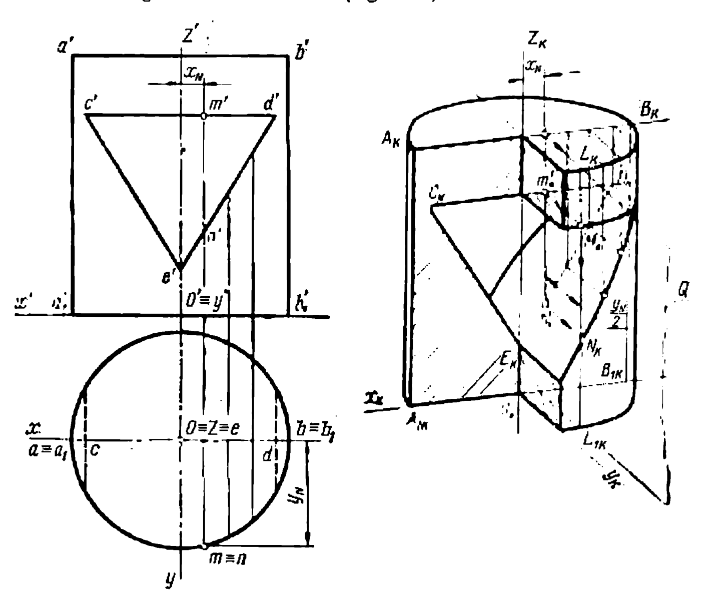


Fig. 318

On prend pour origine des coordonnées le centre de la base inférieure du cylindre, et son axe pour l'axe Oz. Il est avantageux de construire la projection secondaire dans le plan de coordonnées $x_K O_K z_K$, car il n'y a alors que des lignes droites à tracer. Cette projection donne le parallélogramme $A_K B_K B_{1K} A_{1K}$ et le triangle $C_K D_K E_K$. Pour rendre l'intelligence du dessin plus immédiate, on enlève un quart du cylindre.

Sans nous attarder à l'exécution du dessin des ellipses qui représentent les contours des bases supérieure et inférieure du cylindre, considérons la construction d'un point N_K de l'arc elliptique suivant lequel le plan oblique du trou triangulaire coupe la surface cylindrique.

L'image axonométrique N_K du point N peut être trouvée à l'aide du dessin orthogonal ou indépendamment.

Dans le premier cas on détermine sur les projections orthogonales les coordonnées cartésiennes x_N et y_N du point. Ensuite, à l'aide de l'abscisse x_N on trouve sur la droite $D_K E_K$ la projection secondaire n'_K. Enfin, on mène par n'_K une droite parallèle à l'axe $O_K y_K$ et on porte sur cet axe à partir du point n'_K un segment égal à $0,5\ y_N$ (dans notre exemple $t=0,5$). Autrement dit, N_K est construit par la méthode des coordonnées.

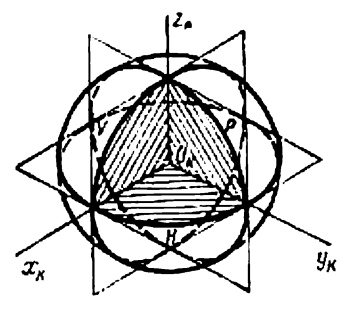


Fig. 319

Fig. 320

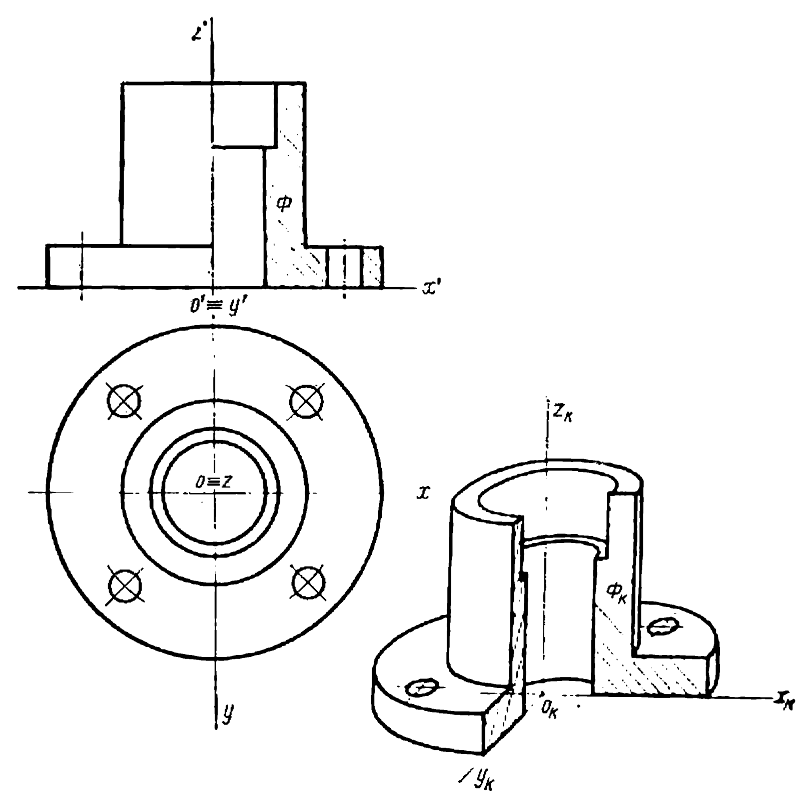


Fig. 321

Ce même point peut être défini par l'intersection de la génératrice $L_K L_{1K}$ du cylindre et de l'horizontale $n'_K N_K$ du plan oblique du trou, et dans ces conditions, la génératrice et l'horizontale doivent appartenir au même plan Q parallèle au plan de coordonnées $y_K O_K z_K$. Les autres points de la section oblique s'établissent d'une manière analogue.

E x e m p l e 6. *Projection isométrique orthogonale d'une sphère* (fig. 319). Les fuyantes qui rendent possible l'établissement de l'axonométrie d'une sphère forment une surface cylindrique de révolution.

Le plan du tableau peut couper le cylindre suivant une circonférence ou une ellipse. Ce dernier cas correspond à une direction oblique des fuyantes.

Dans notre exemple, le plan du tableau est perpendiculaire aux génératrices de la surface projetante et *le contour de la projection de la sphère est une circonférence. Son rayon est égal au rayon de la sphère.*

Pour donner à l'image une impression de volume on montre sur la figure 319 les sections de la sphère par les plans de coordonnées, $\frac{1}{8}$ partie de la sphère située dans le premier octant étant enlevée.

Pour construire les sections qui représentent trois ellipses égales, on porte sur les axes de coordonnées des segments égaux à 0,82 R (R est le rayon de la

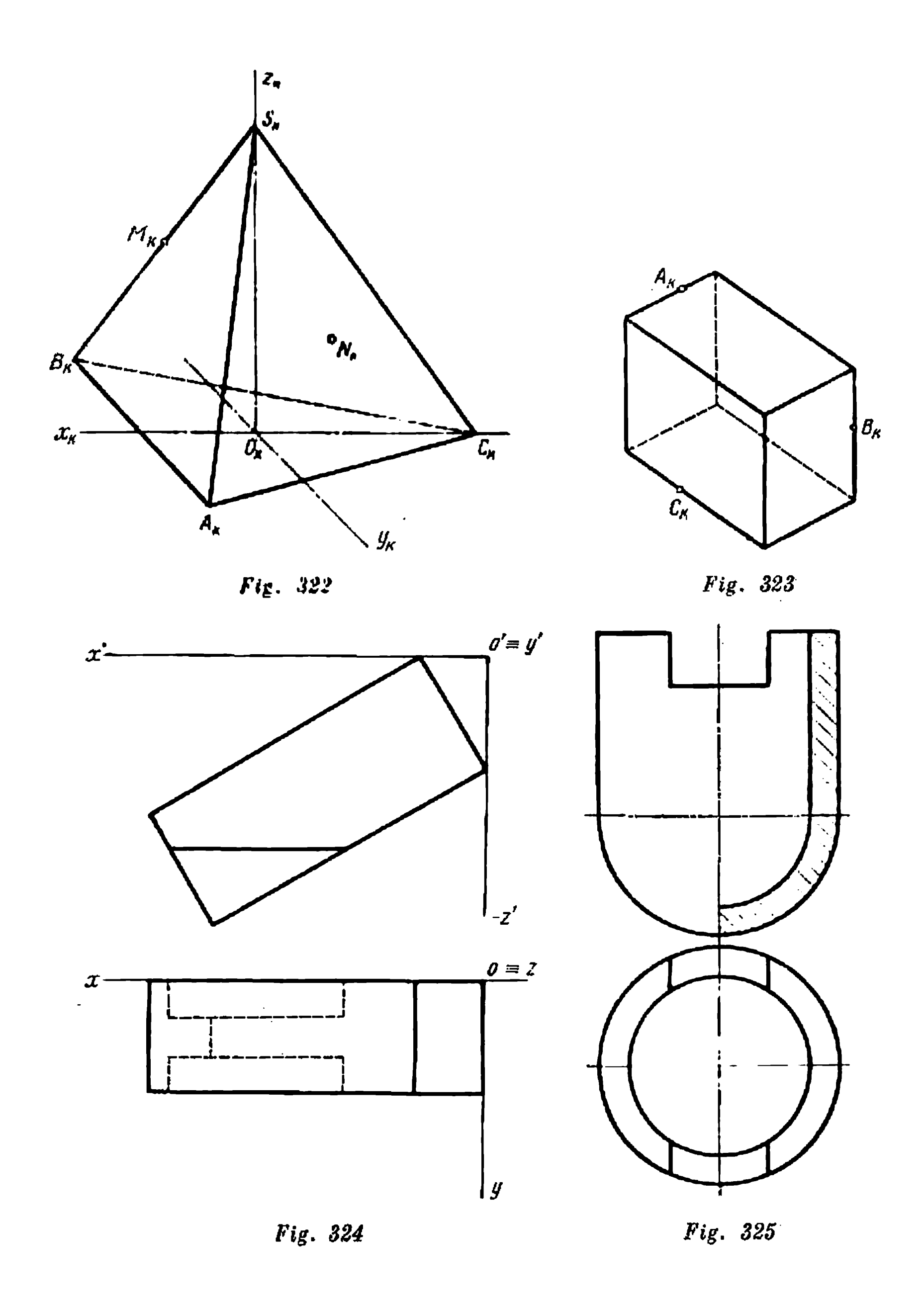


Fig. 322

Fig. 323

Fig. 324

Fig. 325

sphère). Si l'on prend ces segments égaux à R, on devrait prendre 1,22 fois plus grand le rayon de la circonférence qui constitue le contour de l'image axonométrique de la sphère.

E x e m p l e 7. *Construire la projection monodimétrique oblique d'un demi-manchon à crabots, son quart* (fig. 320) *étant supposé découpé.*

Le tableau étant ici parallèle au plan frontal V, toutes les faces de la pièce parallèles à V sont représentées en axonométrie en vraie grandeur. Le plus avantageux est de placer l'origine des coordonnées [1] en un des points de l'axe du manchon. Soit le point O situé dans le plan d'où part la rainure de clavette. Les centres des autres circonférences sont déplacés par rapport à l'origine des coordonnées dans le sens de l'axe O_Ky_K. Le déplacement de chaque centre est déterminé par son éloignement y divisé par deux (le rapport de réduction suivant l'axe O_Ky est égal à 0,5). Ainsi, pour construire le contour extérieur de la face des crabots, il faut prendre sur l'axe O_Ky_K un point C_K éloigné à $\frac{y_C}{2}$ de l'origine des coordonnées. Les centres des autres circonférences sont trouvés d'une manière analogue.

L'intelligence de l'image du manchon est rendue immédiate à l'aide d'une section par deux plans qui montre sa forme intérieure.

Notons qu'il est avantageux de commencer la construction du dessin d'une pièce à un quart enlevé par l'exécution des figures (sections) qui se situent dans des plans sécants. Montrons l'application de cette méthode sur l'exemple suivant.

E x e m p l e 8. *Construire la projection monodimétrique oblique de la pièce représentée sur la figure* 321.

On dessine d'abord la section de la pièce contenue dans le plan de coordonnées $x_KO_Kz_K$. Dans le cas considéré, lorsque $s = u = 1$, elle ne se distingue en rien de la figure hachurée Φ de la projection frontale. On construit ensuite la section dans le plan $y_KO_Kz_K$. Toutes les dimensions verticales de cette section sont reportées en vraie grandeur du dessin orthogonal, alors que les dimensions suivant l'axe O_Ky_K sont divisées par deux. Il reste à construire les lignes du contour apparent de la pièce. Dans notre cas ce sont les cercles dont l'image axonométrique a été décrite au § 62.

E x e r c i c e s

1. Déterminer les coordonnées des points M et N_K, dont le premier se situe sur l'arête S_KB_K, et le deuxième, sur la face $S_KA_KC_K$ du tétraèdre (fig. 322).

2. On donne la perspective axonométrique d'un parallélépipède rectangle. Construire sa section par un plan déterminé par trois points A_K, B_K et C_K (fig. 323).

3. Dessiner la perspective axonométrique (isométrie oblique frontale) d'un barreau oblique déterminé par des projections orthogonales (fig. 324).

4. Une pièce à un quart enlevé (fig. 325) est donnée par ses projections orthogonales. Construire son isométrie.

---

[1] Pour les figures 320 et 321 on a choisi un système de coordonnées senestre.

PERSPECTIVE LINÉAIRE

§ 64. Généralités

La perspective est un mode de représentation des corps et des figures planes fondé sur l'application de la projection centrale (voir §§ 1 et 2). Pour construire l'image perspective d'un objet à partir d'un point S (point de vue), on trace des rayons vers tous les points de l'objet. Sur le trajet des rayons visuels on place un plan K (tableau) sur lequel on construit l'image recherchée en déterminant les

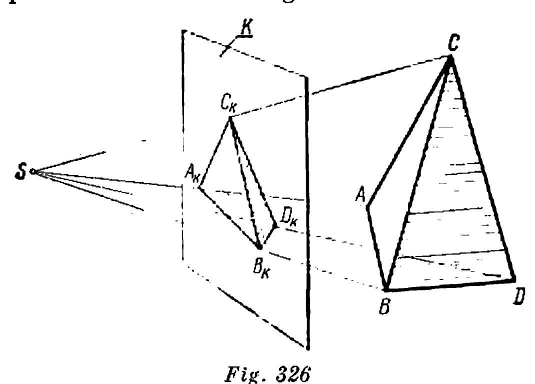


Fig. 326

points d'intersection des rayons avec le tableau. La figure 326 illustre le principe de construction de la perspective d'un objet sur un plan (perspective linéaire).

L'image perspective de l'objet correspond (avec une certaine approximation) à ce que voit l'œil, c'est-à-dire qu'elle traduit les déformations apparentes de la grandeur et de la forme de l'objet représenté dues à sa position et son éloignement par rapport à l'observateur. Il en est ainsi parce que dans le sens géométrique, le processus de la vision s'apparente à la projection centrale.

La surface sur laquelle on obtient l'image n'est pas forcément plane, elle peut être également cylindrique ou sphérique. Dans le premier cas la perspective est dite *panorama*, dans le deuxième, *coupole*. Notre étude se limitera à la perspective linéaire.

Nous avons établi au § 2 lors de l'examen de la projection centrale qu'une projection conique d'un point (et donc d'un objet) ne détermine pas sa position dans l'espace. En effet, tout point A_K du plan K (voir fig. 327) correspond à un point quelconque du rayon visuel SA_K.

Pour rendre biunivoques les points de l'objet à représenter et les points sur le tableau K (rendre l'image réversible), le point A donné (fig. 327) est projeté orthogonalement sur le plan horizontal T perpendiculaire au tableau pour déterminer sur celui-ci les projections

perspectives (coniques) du point A ainsi que de sa projection horizontale a. Sur la figure 327 le rayon visuel passant par A perce le tableau en A_K. On obtient ainsi l'image perspective (ou image tout court) du point A. La deuxième projetante menée par a perce le tableau en a_K et détermine l'image de la projection horizontale du point A. Appelons par convention le point a_K *projection secondaire* du point A (dont la projection primaire est a). Sur le plan K, *l'image perspective du point et sa projection secondaire se situent sur la même droite*

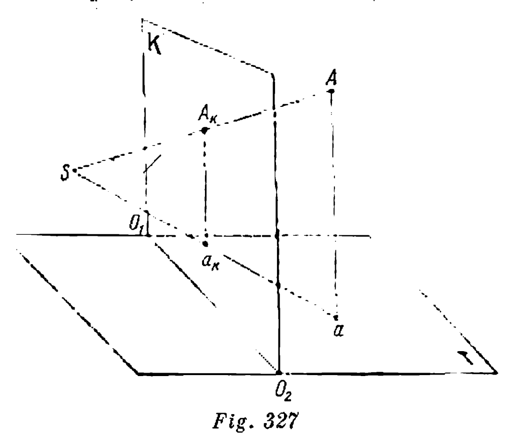


Fig. 327

verticale. Il en est ainsi parce que la droite A_Ka_K est la ligne d'intersection de deux plans verticaux, du tableau et de celui mené par le rayon visuel (sur le dessin 327 ce plan est hachuré).

Le plan qui contient le rayon visuel est vertical dans l'espace parce qu'il passe par la perpendiculaire Aa au plan T. Montrons maintenant que *l'image du point et sa projection secondaire déterminent d'une manière univoque la position du point dans l'espace*. Soient sur la figure 327 les points A_K, a_K, S et deux plans K et T. Traçons à partir du point S des rayons visuels jusqu'à A_K et a_K. L'intersection du deuxième de ces rayons visuels (Sa_K) avec le plan T donne la projection primaire a.

En élevant au point considéré a une perpendiculaire à T, on trouve son intersection avec le rayon visuel SA_K. Or, c'est justement A, le point recherché de l'espace.

§ 65. Système de plans d'une perspective linéaire

Dans le paragraphe considéré nous allons définir les éléments de la perspective linéaire que nous utiliserons dans ce qui suit.

Considérons tout d'abord les 4 plans K, T, N_0 et H (fig. 328). Le premier d'entre eux, K est le *plan du tableau*; c'est le plan sur

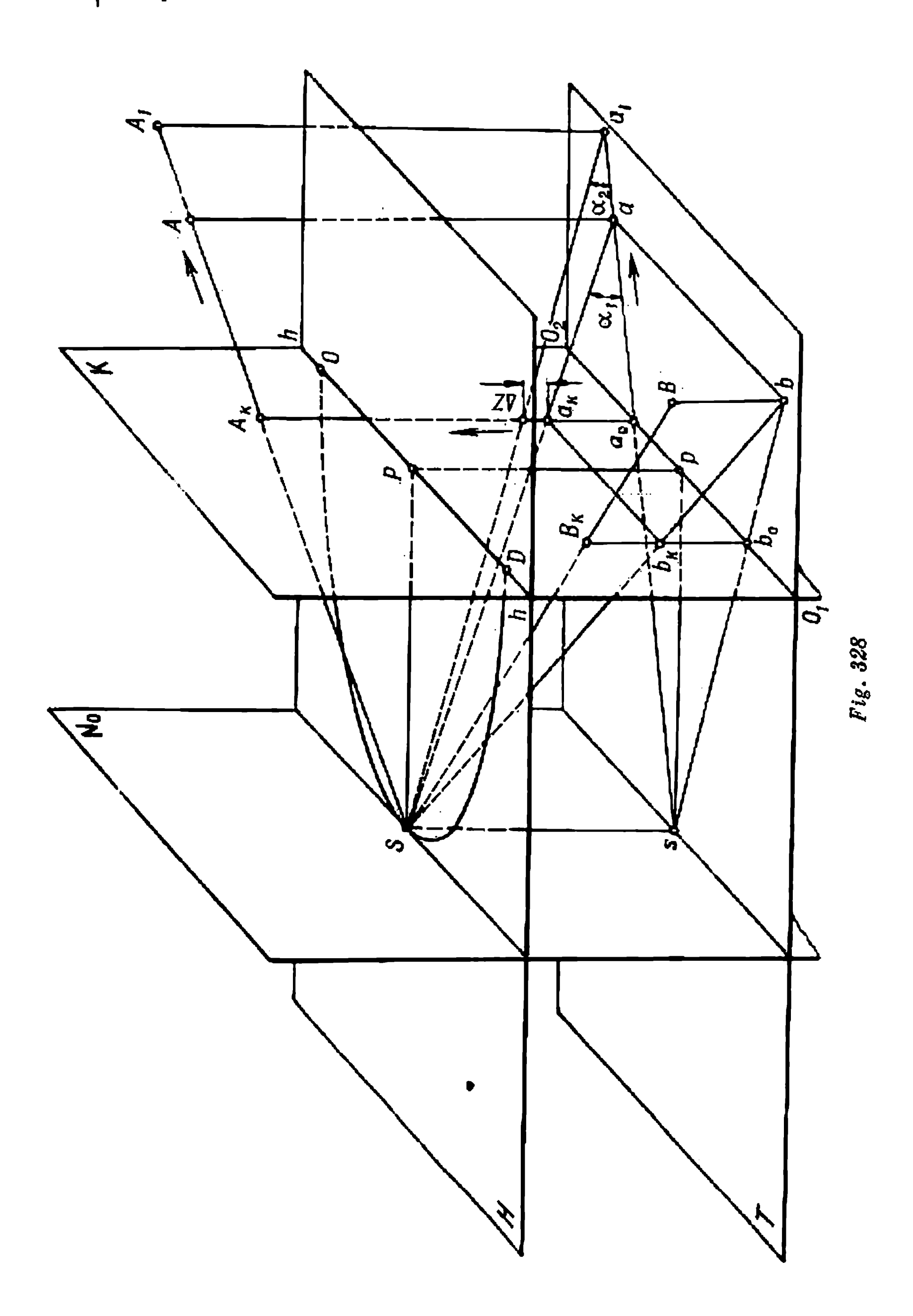


Fig. 328

lequel on construit l'image perspective de l'objet, en le plaçant dans les cas courants sur le plan T horizontal qui s'appelle *terrain* ou *sol.* Les plans K et T se coupent sous un angle droit suivant la ligne O_1O_2 nommée *trace du tableau* ou ligne de terre. Les deux autres plans H et N_0 respectivement parallèles *à* K et T passent par le point de vue S. Le plan horizontal H s'appelle *plan d'horizon*, et le plan vertical N_0, parallèle à l'image, est dit *plan passant par le point de vue.* Les plans H et K se coupent suivant une droite horizontale *hh* dite *ligne d'horizon.*

Du point de vue S abaissons une perpendiculaire sur le terrain. Le pied de cette perpendiculaire est la *projection horizontale du point de vue.* La distance entre le point S et le tableau porte le nom de *distance principale*, et le point P qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du point de vue sur le plan K s'appelle *point principal* du tableau. Cette perpendiculaire appartenant au plan H, son pied (le point principal) repose sur la ligne d'horizon. Dans certains cas on recourt à ce qu'on appelle les *points de distance D* (points d'éloignement) situés sur la ligne d'horizon et tels que $DP = SP$. L'espace délimité par les plans K et N_0 s'appelle espace *intermédiaire*, la partie de l'espace devant l'observateur et derrière le tableau est dite l'espace *du terrain*, et l'espace derrière le spectateur s'appelle espace *virtuel.*

Pour construire une perspective, il faut connaître la position du point de vue S par rapport aux plans K et T.

§ 66. Images des points situés dans différentes parties de l'espace

Considérons le point A situé dans l'espace du terrain (voir fig. 328) et observons les modifications de sa perspective et de sa projection secondaire lors du déplacement du point A le long du rayon visuel SA. Si le point se déplace de A en A_1, sa perspective reste toujours en A_K. Sa projection secondaire se déplace verticalement vers le haut à la distance Δz. A mesure que le point A s'éloigne du plan du tableau sa projection secondaire s'approche de la ligne d'horizon, car l'angle d'inclinaison du rayon visuel qui détermine la projection secondaire diminue ($\alpha_2 < \alpha_1$). A la limite, lorsque le point A est à l'infini, l'angle α devient nul et le rayon visuel horizontal du point à l'infini se situe dans le plan H.

On en déduit que *la projection secondaire d'un point de l'espace du terrain à l'infini doit reposer sur la ligne d'horizon.* Cette conclusion très importante sera utilisée plus d'une fois dans ce qui suit.

En comparant la position des points A et A_1 par rapport au plan du tableau avec leurs projections secondaires, nous en tirons que plus le point est proche du tableau, moindre est la distance entre sa

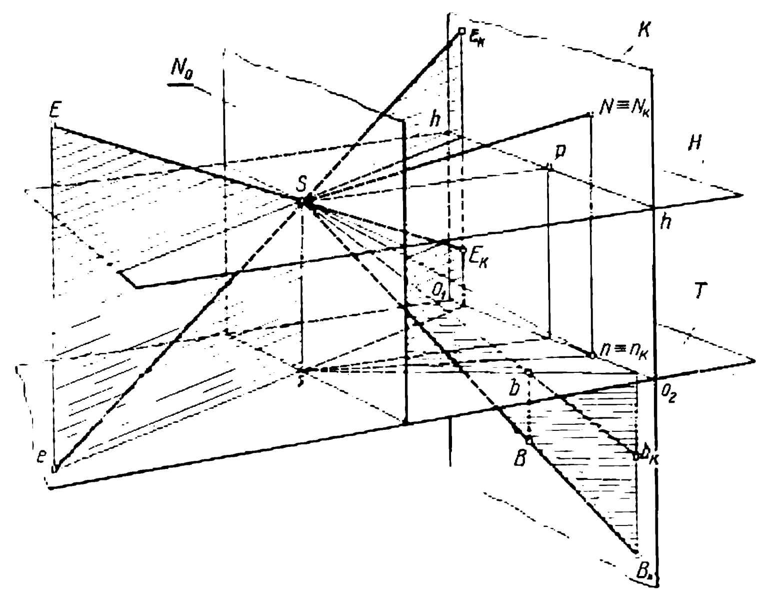


Fig. 329

projection secondaire et la ligne de terre. *Lorsque deux points A et B sont équidistants du plan du tableau, leurs projections secondaires se trouvent à la même distance de la ligne de terre.*

En effet, dans ce cas la droite *ab* est parallèle à la ligne de terre et le triangle *abs* permet d'écrire l'égalité des deux rapports $\frac{aa_0}{as} = \frac{bb_0}{bs}$.

Mais comme $\frac{aa_0}{as} = \frac{a_0a_K}{sS}$ (égalité tirée du triangle *asS*) et $\frac{bb_0}{bs} = \frac{b_0b_K}{sS}$ (du triangle *bsS*), il vient

$$\frac{a_0a_K}{sS} = \frac{b_0b_K}{sS},$$

d'où l'on tire que $a_0a_K = b_0b_K$.

La figure 329 montre la construction de la perspective et des projections secondaires des points situés dans les espaces intermédiaire (point *B*) et virtuel (point *E*). Les projections secondaires des points de l'espace intermédiaire se trouvent au-dessous de la ligne de terre (b_K, par exemple). Mais lorsque les points appartiennent à l'espace virtuel, leurs projections secondaires reposent au-dessus de la ligne d'horizon (e_K, par exemple). Les projections secondaires des points

de l'espace de terrain ne peuvent se situer qu'entre la ligne de terre et la ligne d'horizon (voir fig. 328). Enfin les projections secondaires des points du tableau se projettent sur la ligne de terre (par exemple, le point N de la fig. 329). Quant à la ligne d'horizon, elle est le lieu géométrique des projections secondaires des points à l'infini. Ainsi, *la projection secondaire d'un point permet d'établir dans quelle partie de l'espace il se trouve* [1].

On désigne par convention les points de l'espace par les majuscules (A, B, E, . . .), leurs images par ces mêmes majuscules affectées d'un indice (A_K, B_K, E_K, . . .), et les projections secondaires par les minuscules correspondantes affectées du même indice (a_K, b_K, e_K, . . .).

§ 67. Perspective d'une droite

Les rayons visuels qui passent par le point S et la droite AB forment un plan. Ce plan visuel coupe le tableau suivant la droite A_KB_K qui est l'image de la droite donnée (fig. 330). Lorsque la droite passe par le point de vue S, son image se réduit à un point. Lorsqu'une droite n'est définie que par son image, sa position n'est pas déterminée dans l'espace. *L'image perspective d'une droite est réversible lorsqu'elle est complétée par une projection secondaire.*

Sur la figure 330 l'image de la droite AB et sa projection secondaire sont déterminées par les images et les projections secondaires de ses deux points A et B.

Connaissant A_KB_K et a_Kb_K, on peut déterminer deux points figuratifs de la droite, à savoir : l'image F_K d'un point F à l'infini et l'origine de la droite N_K (on appelle par convention origine d'une droite le point de sa rencontre avec le tableau). La projection secondaire du premier d'entre eux (point f_K) doit se trouver sur la ligne d'horizon, et celle du deuxième (point n_K) sur la ligne de terre. Une droite verticale menée par f_K jusqu'à son intersection avec A_KB_K donne l'image F_K d'un point à l'infini de la droite, dite point de fuite. C'est le point où le tableau est percé par le rayon visuel dirigé vers le point à l'infini de la droite considérée (parallèle à AB). La perpendiculaire à la ligne de terre O_1O_2, qui passe par n_K en rencontrant A_KB_K détermine l'origine de la droite (le point N_K).

L'origine et le point à l'infini d'une droite s'emploient généralement pour construire la perspective de différents objets.

La position du point de fuite d'une droite permet de juger de sa position dans l'espace. Ainsi *lorsque le point de fuite F_K se situe au-dessus de la ligne d'horizon* (voir fig. 330) *la droite AB est montante,*

---

[1] A l'exception des points à l'infini.

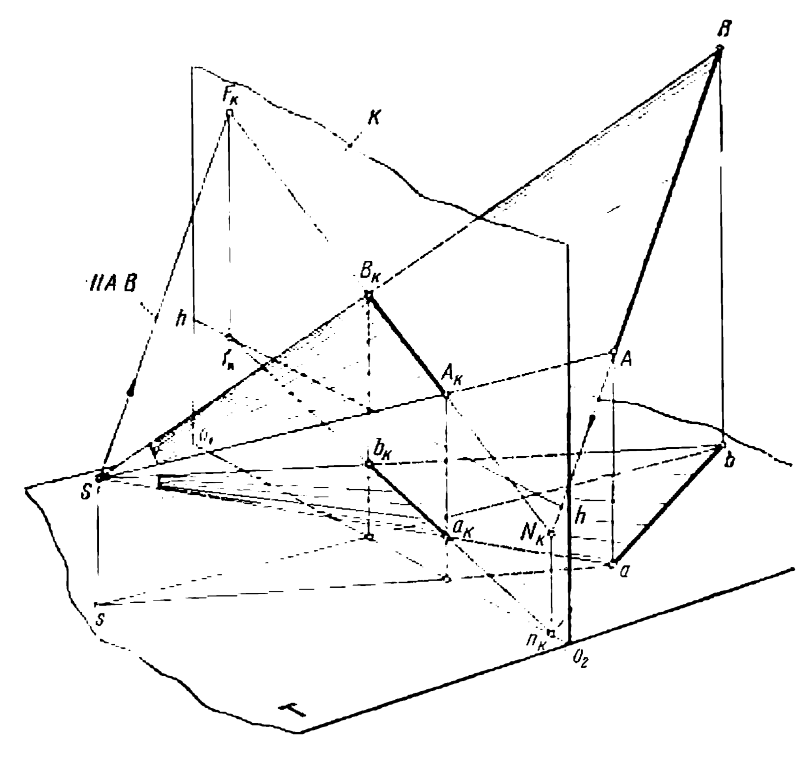


Fig. 330

car le rayon visuel mené du point de vue parallèlement à la droite donnée est dirigé vers le haut. *Si F_K se trouve au-dessous de la ligne d'horizon, la droite AB est descendante* (fig. 331). Le point M_K où l'image de la droite rencontre la projection secondaire est l'image de la trace de la droite AB sur le terrain T. Enfin, *lorsque l'image d'un point à l'infini se trouve sur la ligne d'horizon, la droite AB est horizontale* (fig. 332).

Dans ce qui suit nous aurons souvent à construire des droites perpendiculaires au plan du tableau dites droites de bout. Pour trouver le point à l'infini de telles droites on mène à partir du point de vue un rayon visuel principal (perpendiculaire au tableau). Le point d'intersection de ce rayon avec le tableau est le point principal. Par conséquent *le point principal P est le point de fuite des droites perpendiculaires au tableau* (voir la droite N_KP de la fig. 332).

La figure 333 représente des droites dont tous les points sont à la même distance du plan du tableau. Comme nous l'avons montré au § 66, les projections secondaires de ces points doivent se trouver à la même distance de la ligne de terre. C'est pourquoi

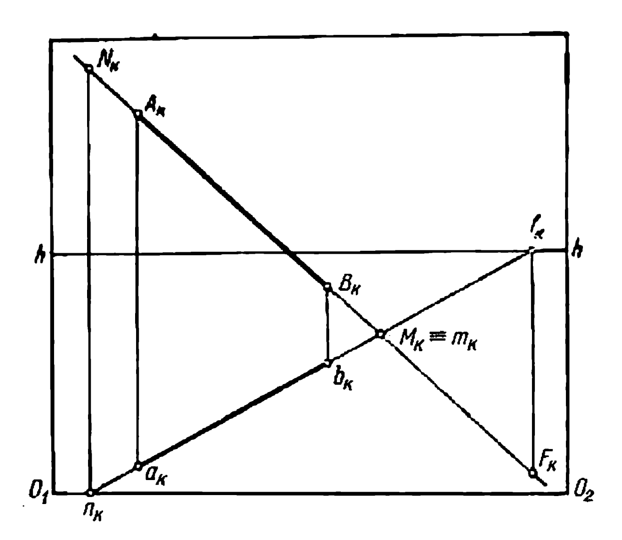


Fig. 331

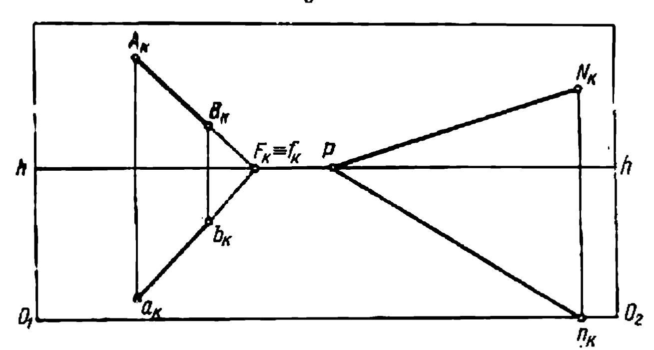


Fig. 332

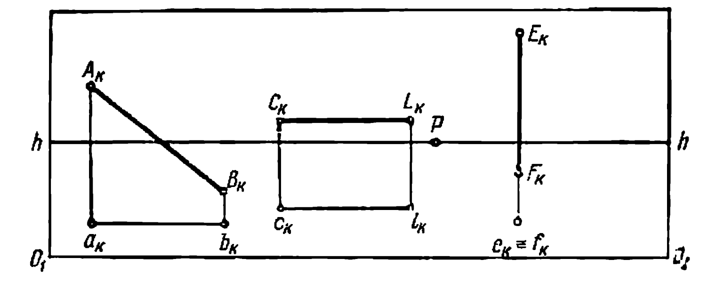


Fig. 333

les projections secondaires de la droite AB parallèle au tableau et de la droite CL parallèle au tableau et au terrain sont menées parallèlement à la ligne de terre O_1O_2.

Si la droite EF est perpendiculaire au terrain, sa projection secondaire est un point (voir fig. 333).

Mais si la droite est contenue dans le terrain, la perspective de la droite et sa projection secondaire se confondent.

§ 68. Positions relatives de deux droites

1. Droites parallèles. *Si des droites de l'espace sont parallèles, leurs images passent par un point de fuite commun.* En effet, considérons la construction des images des droites parallèles AB et LE représentées sur la figure 334. En prolongeant les droites jusqu'à leur intersection avec le tableau, nous trouvons leurs origines, les points N_{1K}

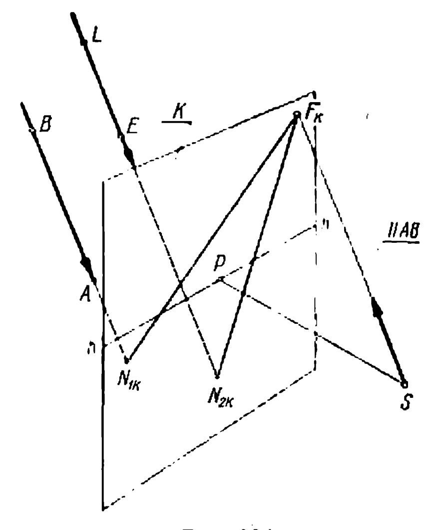


Fig. 334

et N_{2K}. Le deuxième point qui détermine les perspectives cherchées est le point commun F situé à l'infini ; pour sa construction on mène du point de vue S un rayon parallèle aux droites données.

Les images et les projections secondaires des droites parallèles sont représentées sur la figure 335.

Dans le cas où les droites parallèles sont horizontales, leur point de fuite repose sur la ligne d'horizon. Lorsque les droites horizontales sont perpendiculaires au tableau, leur point de fuite est le point principal P (fig. 336).

Dans le tracé des images des objets qui suivent, il nous faudra souvent construire les images perspectives des droites parallèles

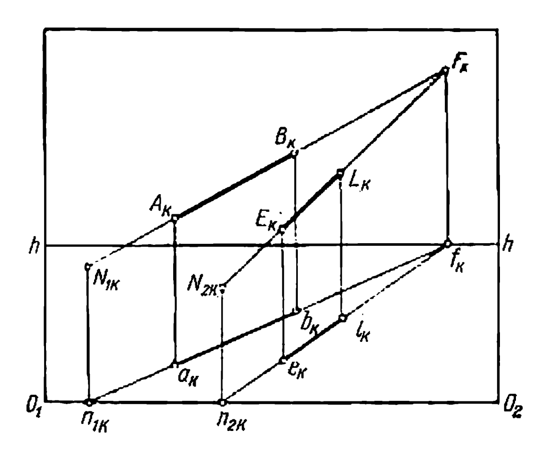


Fig. 335

contenues dans le terrain T. Leur point de fuite se situe sur la ligne d'horizon (fig. 337).

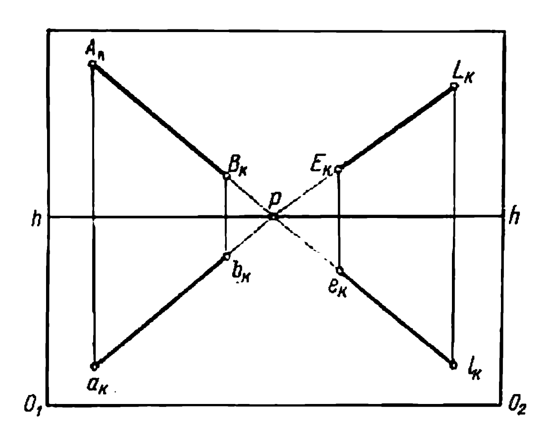


Fig. 336

2. **Droites concourantes et gauches.** *Si deux droites ont un point commun, les points d'intersection de leurs images et de leurs projections secondaires sur le tableau reposent sur une perpendiculaire commune à la ligne d'horizon* (fig. 338).

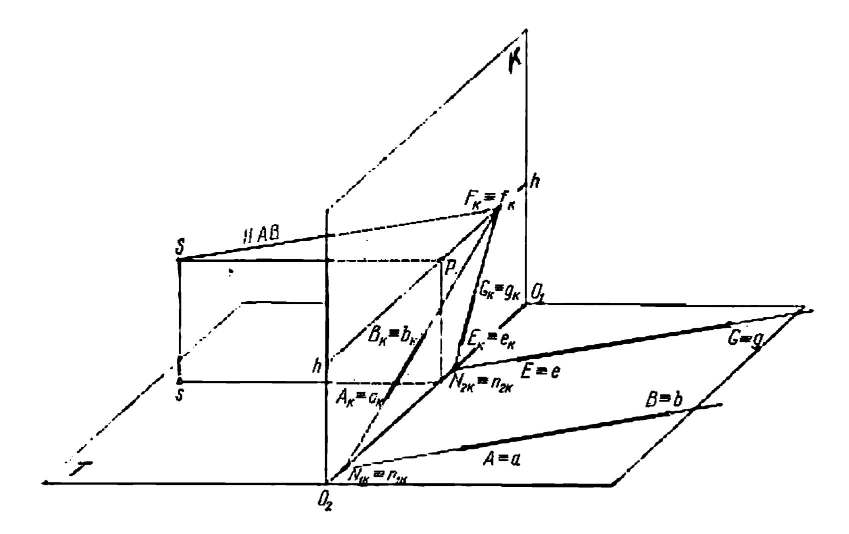


Fig. 337

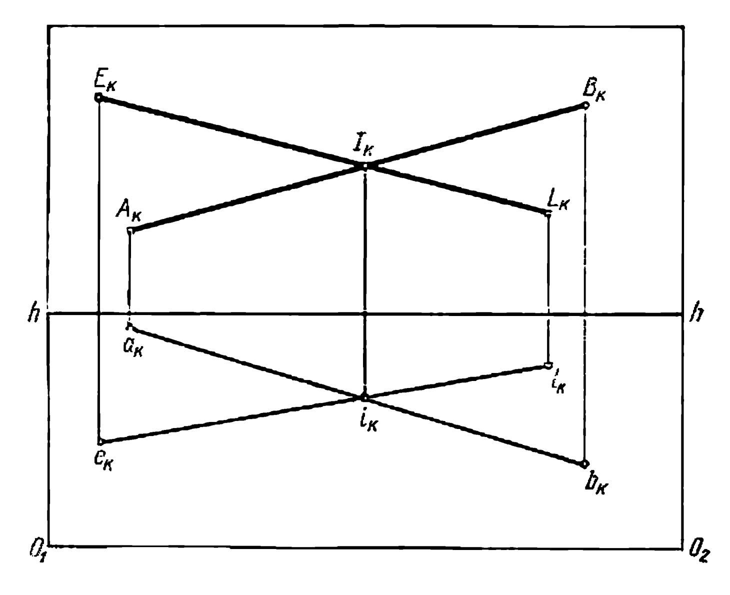


Fig. 338

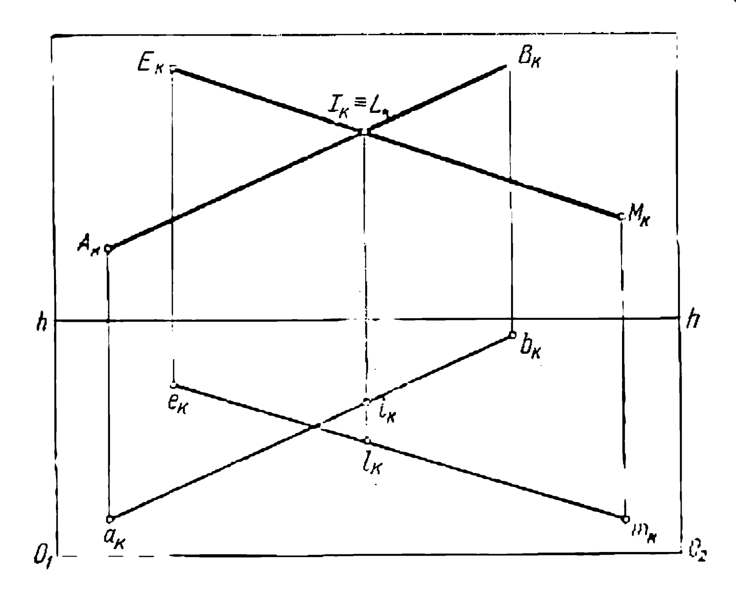


Fig. 339

La figure 339 représente deux droites gauches pour lesquelles les points d'intersection des images correspondent à deux points différents I et L, dont le premier appartient à la droite AB, et le deuxième à la droite EM.

§ 69. Choix du point de vue et de l'angle visuel. Orientation du tableau

Pour obtenir une bonne image de l'objet, il est recommandé de se guider par les considérations suivantes établies empiriquement.

1. L'angle entre les rayons visuels passant par les points extrêmes de l'objet, dit *angle visuel* φ (fig. 340), doit être pris entre 18° et 53°. Sa grandeur optimale est de 28°. Si l'objet est plus haut que large, le spectateur doit s'en éloigner à la distance d'une hauteur et demie ou de deux hauteurs de l'objet, afin que l'angle visuel acquière une grandeur admissible.

2. Le tableau doit être orienté de telle façon que, premièrement, le point principal se situe dans le tiers central de la largeur du tableau, et que, deuxièmement, la trace horizontale K_H du tableau forme avec un des côtés du plan de l'objet (le plus souvent avec la façade) un angle de 25° à 35°.

Dans ces conditions, en perspective, la face latérale est nettement réduite et l'ensemble de l'image devient plus expressif. De plus, il

est avantageux de rabattre sur le tableau une des arêtes de l'objet dont l'image se traduira en vraie grandeur.

L'opération délicate de construction d'une perspective d'intérieur est nettement simplifiée lorsque le tableau est situé frontalement.

3. Il est d'usage de choisir la hauteur de l'horizon au niveau des yeux d'un homme debout sur le sol, c'est-à-dire à h = 1,5 à 1,7 m. Pour figurer un quartier d'habitations, la hauteur de l'horizon est prise égale à 100 m et plus. Une telle perspective est dite « à vol d'oiseau ».

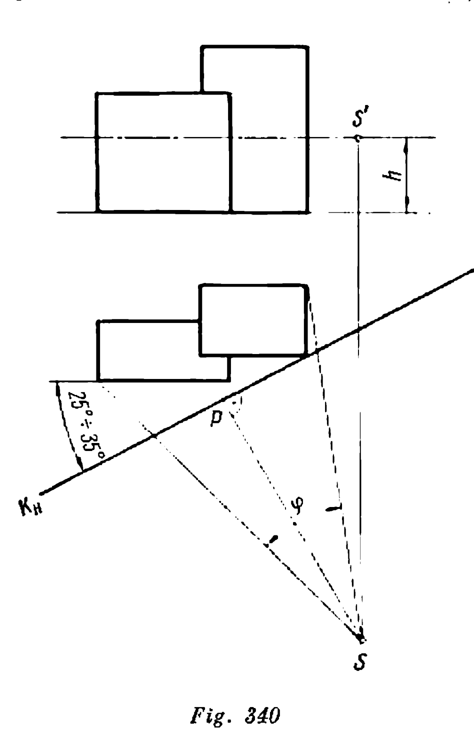


Fig. 340

§ 70. Méthodes de construction des images perspectives

1. Méthode radiale. *Cette méthode consiste dans son principe à déterminer les points de rencontre des rayons visuels avec le tableau.* C'est pourquoi cette méthode est dite souvent *méthode de la trace du rayon.*

La figure 341 donne la construction de l'image d'un point suivant ses projections orthogonales.

En plus des projections orthogonales du point A (a, a'), le dessin porte la trace horizontale K_H du plan du tableau K, les projections du point de vue S (s, s') et le point principal du tableau P.

Après avoir construit la projection horizontale sa du rayon SA et sa projection frontale $s'a'$, on détermine le point de rencontre de ce rayon avec le tableau. Les projections du point de rencontre ainsi trouvé sont désignées A_{KO} et A'_{KO}.

A côté de l'épure est figuré le tableau K rabattu sur le plan du dessin ; sur ce tableau sont représentés ses éléments (ligne de terre, ligne d'horizon et point principal).

Il reste à porter sur le dessin perspectif le point de rencontre du rayon et du tableau trouvé sur l'épure. La position du point sur le plan étant déterminée par deux coordonnées, ces dernières peuvent former un système cartésien dont l'origine se trouve en p. Les dimensions des segments l_A et z_A pris sur l'épure permettent alors d'obtenir

l'image A_K du point A. La projection secondaire du point est construite à l'aide du segment z_a. Ce segment détermine la cote z du point de rencontre du tableau et du rayon visuel dirigé du point de vue vers la projection horizontale du point (voir l'épure de la fig. 341).

La méthode radiale est la plus simple pour construire l'image, car elle n'impose pas la connaissance de la théorie de la perspective.

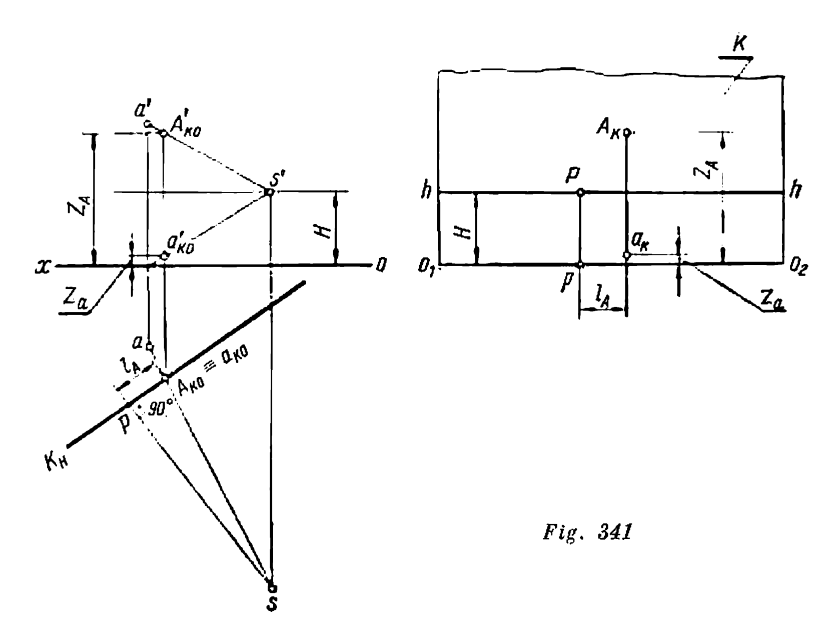


Fig. 341

En effet, l'objet, le point de vue et le tableau sont représentés sur l'épure. Cette même épure porte les projections des rayons visuels et donne les points de leur rencontre avec le tableau.

Pourtant l'application de la méthode radiale qui impose la répétition multiple de mêmes constructions demande beaucoup de temps sans assurer une précision suffisante. Il suffit de dire que pour construire l'image d'un segment de droite il faut effectuer dix opérations élémentaires différentes, dont l'exécution à la règle du tracé de la droite et la construction au compas d'un segment égal au segment considéré. La méthode radiale est avantageuse lorsqu'il faut construire la perspective d'un objet dont le plan comporte de nombreuses lignes non parallèles entre elles.

2. Méthode de deux points de fuite. En pratique dans les bureaux d'architecture on recourt largement à la méthode de construction des perspectives, utilisant les points de fuite des droites parallèles. Cette méthode est dite d'habitude *méthode de deux points de fuite.*

Puisqu'il est recommandé de commencer l'exécution d'une image perspective par la projection secondaire de l'objet, la méthode peut être illustrée dans son principe par l'exemple d'une *figure située dans le plan horizontal.*

Les projections orthogonales d'une telle figure qu'on peut considérer comme le plan d'un certain édifice sont représentées sur la

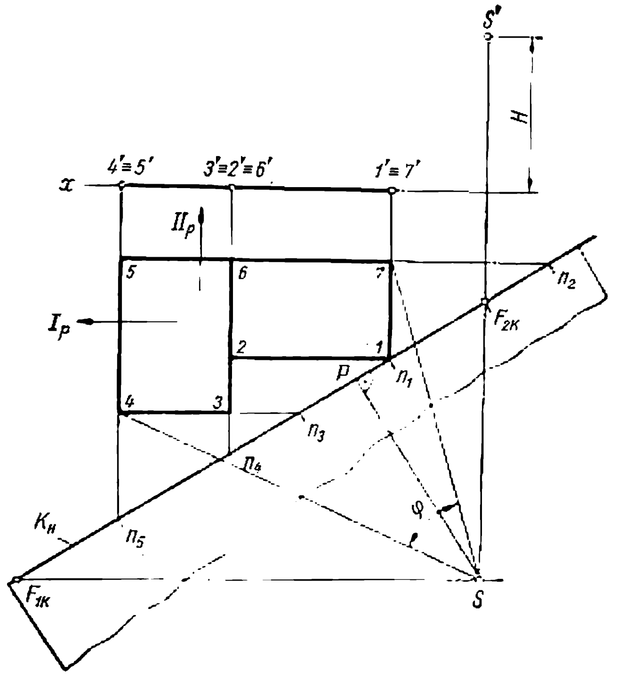


Fig. 342

figure 342. La même épure donne la trace horizontale du tableau, les projections du point de vue et du point principal P.

Les lignes du contour du plan formant deux faisceaux de droites parallèles, on détermine les points de fuite (F_{1K} et F_{2K}) de chaque faisceau ; de plus, le point F_{1K} est le point de fuite du faisceau des droites parallèles de la direction I_P, et F_{2K}, celui de la direction II_P. Les deux points sont obtenus à l'aide des rayons SF_{1K} et SF_{2K} respectivement parallèles aux droites de directions I_P et II_P. Les rayons SF_{1K} et SF_{2K} étant parallèles aux droites situées dans le plan horizontal coupent le tableau aux points reposant sur la ligne d'horizon hh (fig. 343). Dans la construction de l'image sans augmentation, les segments PF_{1K} et PF_{2K} de la figure 343 sont respectivement égaux aux segments PF_{1K} et PF_{2K} de la figure 342.

Comme deuxièmes points nécessaires à la construction de l'image de chacune des droites du contour on prend, suivant les recommandations, les points figuratifs où ces droites rencontrent le tableau, c'est-à-dire les origines des droites. A cet effet les projections horizontales de toutes les droites sont prolongées jusqu'à l'intersection avec la trace de même indice K_H du tableau. On trouve ainsi les points n_1, n_2, n_3, n_4 et n_5 situés sur la ligne de terre. Pour reporter ces points de l'épure sur le tableau on peut appliquer une bande de papier par l'arête

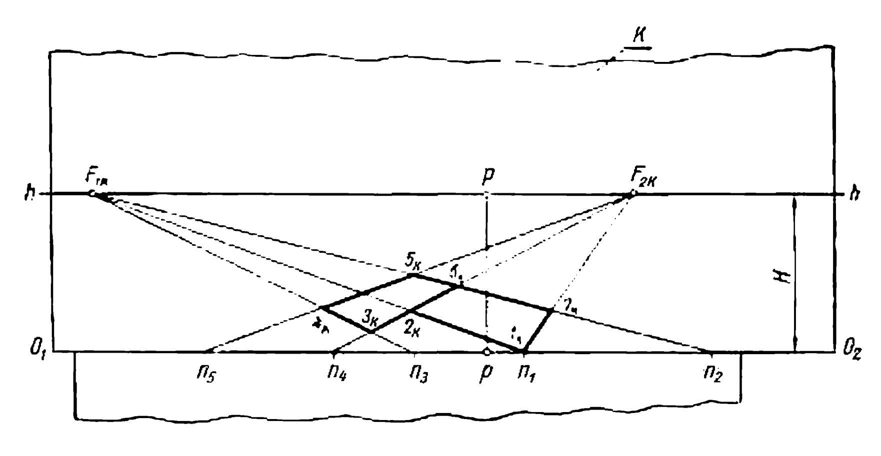


Fig. 343

rectiligne à la trace K_H du tableau et y marquer les points n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 et P. Cette bande de papier est appliquée ensuite à la figure 343, de façon que son arête se confonde avec la ligne de terre O_1O_2 de sorte que le point P de la bande de papier se confond avec le point p de la ligne de terre.

Il reste à construire les images des droites dont l'intersection détermine les sommets du contour donné. Ainsi, le point d'intersection des images des droites n_4F_{2K} et n_3F_{1K} constitue l'image du point III. D'une manière analogue on trouve les autres points. Ainsi, *chaque point d'une figure plane est déterminé par l'intersection des droites de deux faisceaux différents de lignes parallèles.*

Il faut noter que pour construire les images des droites il n'est pas nécessaire de prendre leurs origines en tant que deuxièmes points. Les figures 344 et 345 donnent la construction de l'image de ce même contour dans l'ordre suivant.

1. On marque sur la ligne d'horizon du tableau (fig. 345) les points de fuite F_{1K} et F_{2K} des faisceaux des droites parallèles des directions I_P et II_P. Dans ces conditions, comme auparavant, les segments PF_{1K}

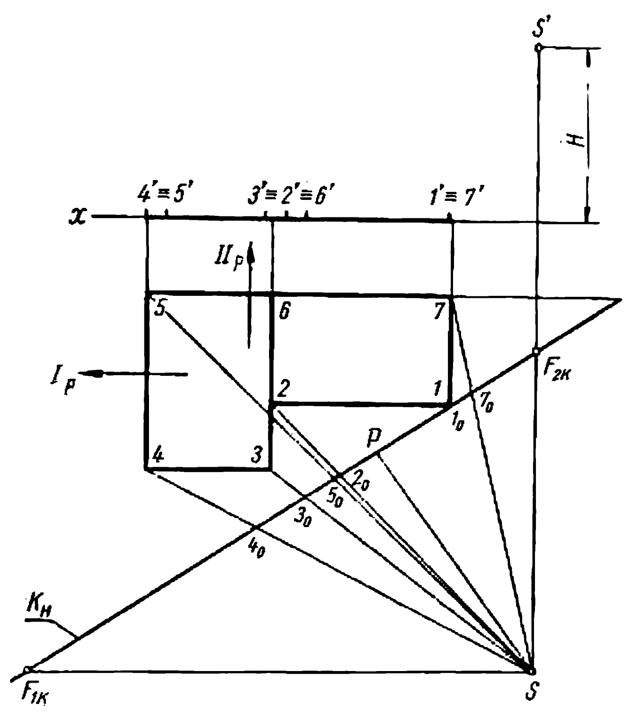


Fig. 344

et PF_{2K} de la figure 345 sont respectivement égaux aux segments PF_{1K} et PF_{2K} de la figure 344.

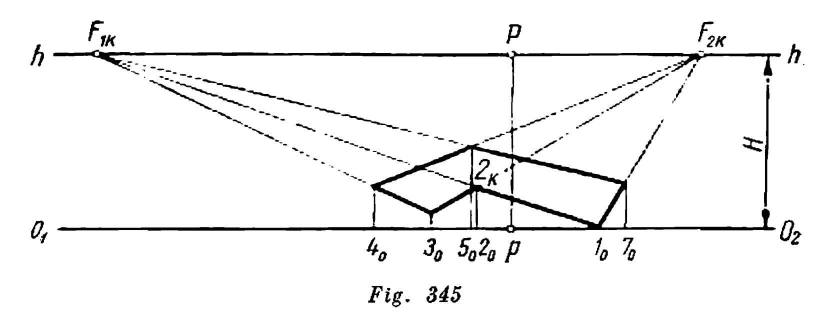


Fig. 345

2. On détermine sur la ligne de terre O_1O_2 (fig. 345) la position de l'image du point *I* (*1*, *1'*) par laquelle passe le tableau. A cet effet on porte à droite, à partir de *p*, un segment $p1_0$ égal au segment $p1$ de l'épure.

3. Puisque par le point I (1, $1'$) passent deux lignes appartenant à des faisceaux différents, on joint son image aux points F_{1K} et F_{2K}.

4. Le point suivant II (2, $2'$) est situé sur la droite $I - II$ de la première direction dont l'image est déjà construite. Pour obtenir l'image du point II (2, $2'$) on mène dans la direction de ce point à partir du point de vue un rayon visuel et on marque le point d'intersection de la projection horizontale de ce rayon avec la trace de même indice K_H du tableau (point 2_0).

5. On porte le point 2_0 de l'épure sur la ligne de terre. Le segment $p2_0$ de la figure 345 est évidemment égal au segment $p2_0$ de la figure 344.

6. On mène par le point 2_0 une ligne verticale qui coupe la droite 1_0F_{1K} construite auparavant et détermine ainsi la position de l'image du point II (2, $2'$).

Les images d'autres points s'obtiennent dans le même ordre.

Le procédé décrit de construction de l'image d'un plan est caractérisé par *l'exécution en premier lieu de l'image d'une droite sur laquelle, à l'aide d'un rayon spécial, on détermine ensuite la position du point.*

La méthode indiquée est avantageuse pour la construction de l'image d'un plan lorsque les points de rencontre des droites avec le tableau se situent en dehors du dessin.

La projection secondaire une fois obtenue il convient de passer à l'exécution de l'image de l'objet lui-même.

La figure 346 donne les projections orthogonales de deux corps géométriques dont le plan est identique à la figure examinée précédemment. Sans reprendre les explications sur la construction de la projection secondaire, donnons l'ordre des opérations permettant d'obtenir l'image de l'objet.

Notons seulement que dans le cas considéré l'image d'un objet (de même que de sa projection secondaire) se construit en augmentant de deux fois sur le tableau toutes les dimensions linéaires. Autrement dit, sur la figure 347 la distance entre la ligne de terre et la ligne d'horizon est égale non pas à H, comme sur la figure 346, mais à $2H$. Les segments PF_{1K} et PF_{2K} de la figure 347 sont deux fois plus grands que ces mêmes segments sur l'épure, etc.

Une fois la projection secondaire tracée sur la figure 347, la construction se poursuit dans l'ordre suivant.

1. Mener par les sommets de la projection secondaire (points 1_K, 2_K, 3_K, etc.) des droites verticales.

2. Porter à partir du point 1_K sur la verticale qui passe par ce point un segment $1A_K$ d'une longueur $2H_1$, car ce segment est contenu dans le plan du tableau, et l'échelle d'agrandissement est 2 : 1.

3. Mener par le point A_K une droite dirigée vers le point de fuite F_{1K}. A son intersection avec la verticale qui passe par le point 2_K, on obtient le point M_K.

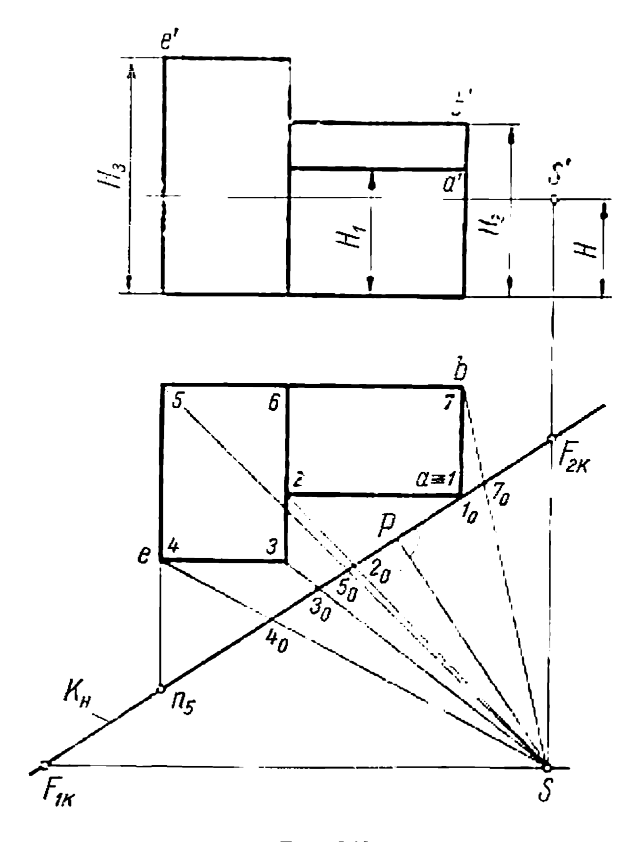


Fig. 346

4. Pour obtenir les images des arêtes verticales de longueur H_3 qui passent par les points 3_K, 4_K, 5_K et 6_K, mener par une arête quelconque un plan vertical Q et construire la ligne d'intersection du plan Q avec le tableau K. Ensuite, après avoir porté sur cette droite (Q_K) depuis la ligne de terre le segment n_5N_5 égal à la hauteur donnée H_3 (compte tenu de l'échelle), mener dans le plan Q une horizontale de niveau donné H_3 jusqu'à son intersection avec l'image de l'arête choisie.

Ainsi, sur la figure 347 le plan Q passe par la droite verticale déterminée par le point 4_K ; dans le cas considéré, le plan Q se confond avec la face arrière gauche de l'objet. La droite n_5F_{2K} constitue la trace horizontale du plan Q (ligne d'intersection de Q et T), et la droite Q_K est la ligne d'intersection du plan Q et du tableau. On porte sur cette droite Q_K à partir du point n_5 le segment n_5N_5 qui est la hauteur H_3

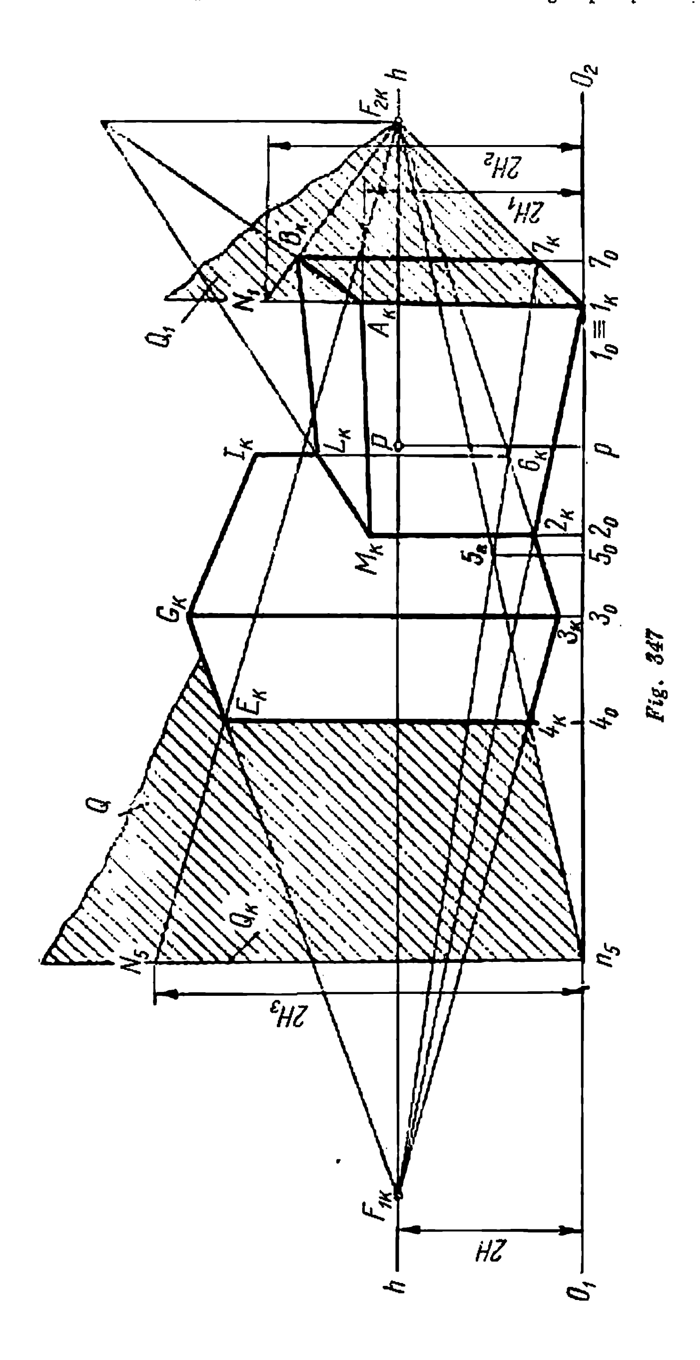

h
O2
F2K
2H2
2H1
7K
7O
Bк
N1
Q1
AK
1O≡1K
p
P
LK
IK
6K
2K
2O
MK
5K
5O
GK
3O
3K
EK
4K
4O
Q
QK
N5
n5
2H3
F1K
2H
h
O1

Fig. 347

de l'arête (sur notre figure, compte tenu de l'échelle, $2H_3$). En joignant les points N_5 et F_{2K} on obtient l'image de l'horizontale de niveau H_3. L'intersection de cette dernière avec la droite verticale menée par le point 4_K détermine le point E_K et achève la construction de l'image de l'arête 4_KE_K non contenu dans le plan du tableau.

5. En utilisant à tour de rôle tantôt le point de fuite gauche, tantôt le point de fuite droite, tracer les arêtes horizontales supérieures E_KG_K et G_KI_K des faces visibles du parallélépipède droit.

6. En reprenant la construction exposée au nº 4, établir l'image de l'arête 7_KB_K.

7. En joignant les points B_K et F_{1K}, obtenir l'image de l'arête horizontale B_KL_K.

8. Dessiner les images de deux droites fuyantes parallèles A_KB_K et M_KL_K.

La précision de la construction est vérifiée par la convergence des droites A_KB_K et M_KL_K sur la verticale menée par le point de fuite F_{2K}.

Il convient d'analyser tout particulièrement le cas où la hauteur de l'horizon est nulle ou si négligeable que la projection secondaire de l'objet est très comprimée. Montrons sur l'exemple de la construction d'une image de parallélépipède droit l'application de l'abaissement du plan indiqué à de pareils cas.

Le passage des projections orthogonales (fig. 348) à la perspective (fig. 349) présente ici une particularité qui consiste à obtenir la projection secondaire de l'objet non pas sur le terrain qui se confond alors avec le plan d'horizon, mais sur un certain plan horizontal auxiliaire déplacé vers le bas par rapport à l'horizon d'une distance quelconque h'.

La droite O_3O_4 parallèle à la ligne d'horizon (fig. 349) est la ligne d'intersection du plan auxiliaire et du tableau. Il est d'usage de l'appeler ligne de terre abaissée.

Sans reprendre la description des constructions conduisant à la projection secondaire et à l'image de l'objet, notons que pour obtenir les images des arêtes verticales du parallélépipède, on reporte leur hauteur H_1 non pas à partir de la ligne de terre abaissée mais de la ligne d'horizon qui dans l'exemple considéré se confond avec la ligne de terre réelle O_1O_2.

La méthode de deux points de fuite qui assure une bonne précision des images et surtout réduit le temps nécessaire pour les obtenir n'exclut pas la méthode radiale. Utilisant la méthode de deux points de fuite pour construire l'ensemble de l'objet, on peut recourir pour certains de ses points à la méthode radiale.

L'application de la méthode de deux points de fuite présente des difficultés lorsque l'un ou les deux points de fuite F_{1K} et F_{2K} des faisceaux de droites parallèles se trouvent en dehors du dessin.

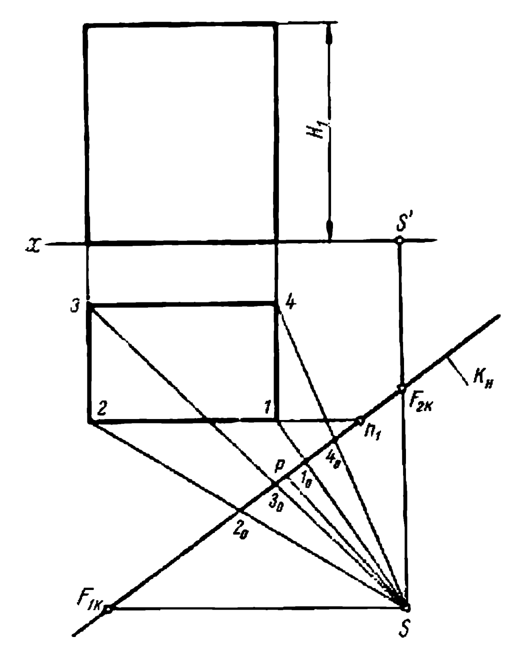


Fig. 348

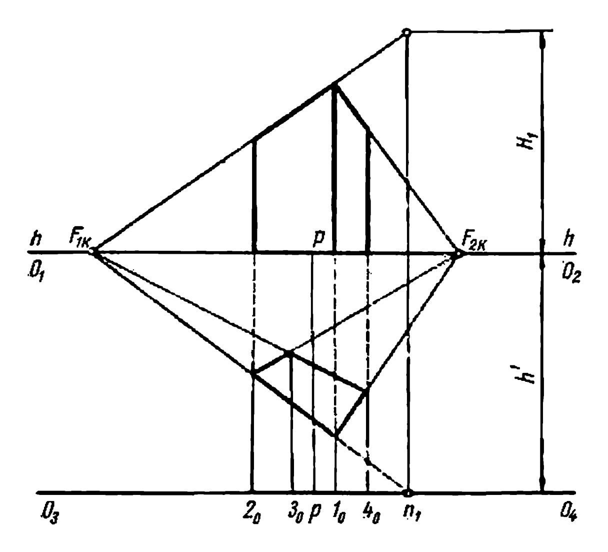


Fig. 349

Si les dimensions de la planche à dessin ne permettent de porter qu'un seul des points de fuite, F_{2K} par exemple, il est recommandé de déterminer chaque point de la projection secondaire par l'intersection de deux droites dont l'une appartient au faisceau de droites qui ont pour point de fuite F_{2K}, et l'autre à un faisceau quelconque de lignes horizontales parallèles. La direction de ce deuxième faisceau doit être telle que son point de fuite se trouve dans les limites du dessin. Dans les cas courants on choisit le faisceau de droites perpendiculaires au tableau dont le point de fuite se situe au point principal du tableau. De même que précédemment toutes les droites du premier et du deuxième faisceau sont déterminées à l'aide de deux points figuratifs, l'origine et le point à l'infini, ce qui est réalisé précisément sur les figures 350 et 351 pour la construction de l'image d'une forme schématisée d'édifice.

Le passage du dessin orthogonal à la perspective peut être observé sur l'exemple du point A de la figure 352.

On mène tout d'abord par la projection horizontale de ce point les droites $an_1 \parallel sF_{2K}$ et $an_2 \perp K$ (voir fig. 350), dont les images sont construites à l'aide des origines n_1 et n_2 et des points à l'infini F_{2K} et P.

L'intersection de ces droites détermine la projection secondaire du point choisi.

Pour construire l'image du point, on utilise le plan vertical R qui coupe le tableau et le terrain respectivement suivant les droites R_K et R_T. Pour libérer le dessin perspectif du réseau des droites auxiliaires, le plan R est situé de côté par rapport au point principal, comme c'est montré sur la figure 352. Des deux plans représentés sur le dessin, on n'a besoin en pratique que de l'un d'eux. Le point F_K du plan R constitue le point de fuite des droites horizontales de ce plan. (Si F_K se confondait avec P, le plan R serait alors perpendiculaire au tableau.)

Sur le plan R on a tracé une de ses horizontales NF_K, dont tous les points ont pour cote $z = z_A$.

De tous les segments verticaux compris entre les droites NF_K et R_T il faut trouver celui qui se situe à la même distance du plan du tableau que le point a_K.

Ce segment a_RA_R est déterminé à l'aide du plan Q parallèle au tableau et passant par le point a_K. La construction s'achève par le tracé du segment vertical

$$a_KA_K = a_RA_R.$$

Des constructions analogues pour les autres points de l'édifice sont exécutées sur la figure 351.

Lorsque les deux points de fuite (F_{1K} et F_{2K}) se trouvent hors du dessin, il est avantageux d'appliquer la méthode dite de trois échelles.

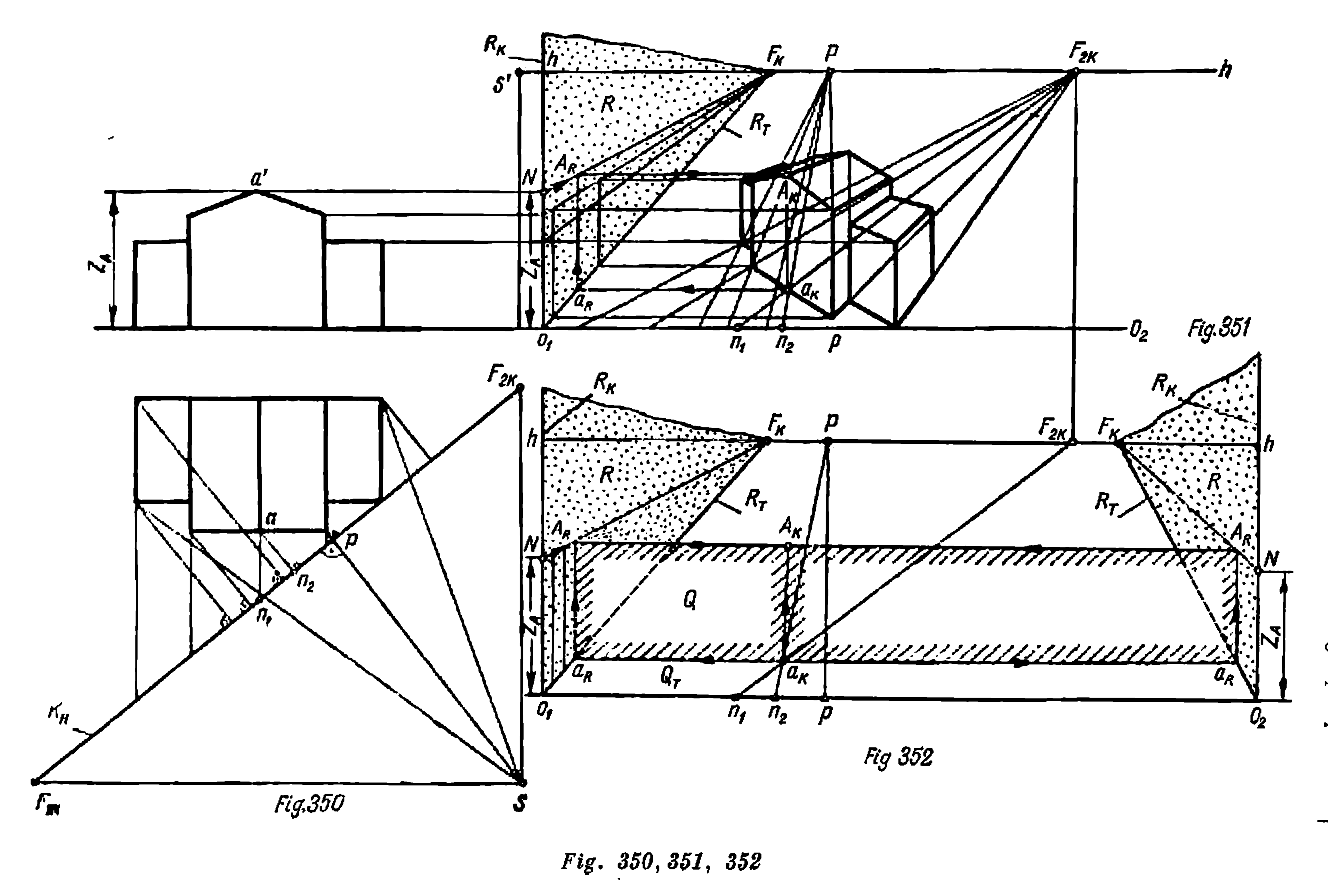


Fig. 350, 351, 352

3. Méthode de trois échelles. Le principe de cette méthode est illustré par l'exemple de la construction de l'image d'un point. Le point A est rapporté à un système de coordonnées cartésiennes $OXYZ$ orienté comme il est indiqué sur la figure 353, tel que l'origine

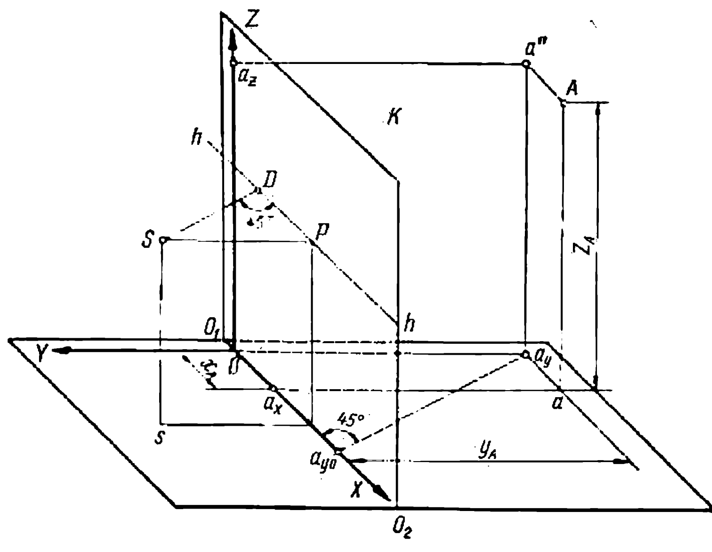


Fig. 353

des coordonnées repose sur la ligne de terre, le plan de coordonnées XOZ se confonde avec le plan du tableau, et l'axe OY soit perpendiculaire au tableau.

Les projections orthogonales des axes de coordonnées sont représentées sur la figure 354. Cette même figure porte les coordonnées marquées du point A (x_A, y_A, z_A) permettant d'obtenir son image sur la figure 355.

Notons au préalable que l'origine des coordonnées de la figure 354 est choisie à une distance quelconque du point P. Mais lors de la construction de l'image perspective d'un système de coordonnées cartésiennes (fig. 355), le point O_K est pris sur la ligne de terre à une distance de p égale à la longueur du segment OP de la figure 354.

Les axes Ox et Oz sont représentés sur le tableau sans réduction sous un angle droit l'un par rapport à l'autre. Quant à l'image de Oy, en tant que droite de bout (perpendiculaire au tableau), elle doit passer par le point principal P qui, comme cela a été montré auparavant, constitue le point de fuite de toutes les droites de bout. Il est d'usage d'appeler les images des axes O_Kx, *échelle des largeurs*, O_Ky, *échelle des profondeurs* ou des éloignements, et O_Kz, *échelle des hauteurs*.

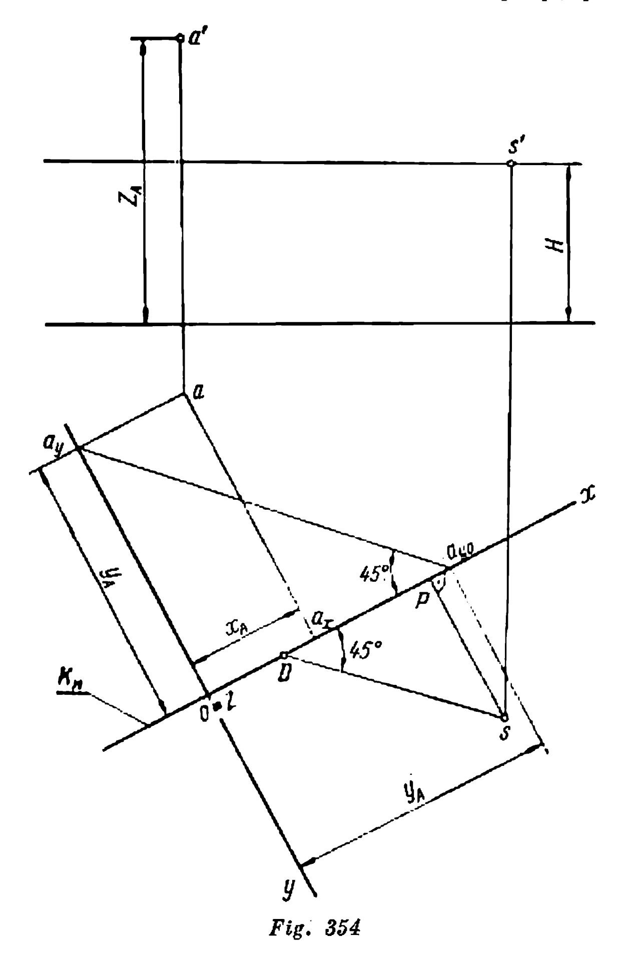


Fig. 354

Pour construire l'image d'un point suivant ses coordonnées on procède comme suit.

1. Porter sur l'échelle des largeurs (voir fig. 355) l'abscisse x_A et tracer la ligne $a_{Kx}P$ en tant que l'image de la droite $a_x a$ (voir fig. 354). C'est la droite sur laquelle doit se trouver la projection secondaire a_K du point A.

2. Pour obtenir sur l'échelle des profondeurs le point a_y utiliser la droite $a_y a_{y\,O}$ qui fait avec l'axe Oy et donc avec le tableau un angle de 45° (voir fig. 354). Le point de fuite de cette droite est le point de la ligne d'horizon se trouvant par rapport au point principal P du tableau à une distance égale à la distance principale (distance du point de vue S au plan du tableau).

17—725

En effet, si l'on considère le triangle rectangle isocèle sPD (fig. 354), on voit que le rayon horizontal sD mené sous un angle de 45° au plan du tableau et qui détermine par là même le point de fuite du faisceau de droites parallèles perce le tableau au point de distance D.

Le point a_{yO} est l'origine de la droite considérée $a_y a_{yO}$. C'est le point qu'il est justement nécessaire de porter sur l'échelle des largeurs en utilisant l'éloignement y_A du point A.

En joignant ce point avec D on obtient l'image de la droite qui coupe l'échelle des profondeurs en a_{Ky}.

3. Les points a_y et a reposant sur la même droite parallèle au tableau (voir fig. 354), la projection secondaire du point se trouve

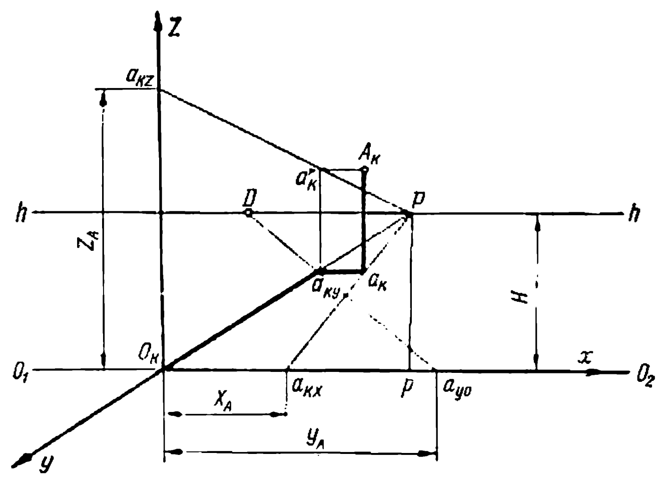


Fig. 355

à l'intersection de la droite $a_{Kx}P$ construite auparavant avec la droite $a_{Ky}a_K$ parallèle à la ligne de terre.

4. Porter sur l'échelle des hauteurs (voir fig. 355) un segment égal à z_A, cote du point A, et joindre le point a_{Kz} à P. La verticale menée de a_{Ky} à la ligne $a_{Kz}P$ donne le segment $a_{Ky}a_K$ égal en perspective à la cote z_K.

Enfin, il reste à construire sur la verticale qui passe par la projection secondaire du point A le segment égal à $a_{Ky}a''_K$, ce qu'on réalise à l'aide de l'horizontale $a''_K A_K$.

L'exécution d'une image perspective par la méthode des échelles peut s'accompagner par un certain agrandissement de l'image lorsque toutes les dimensions linéaires prises sur le dessin orthogonal sont augmentées n fois. Dans ces conditions certains points, D ou a_{yO} par exemple, peuvent se trouver hors du dessin. On recourt alors

à ce qu'on appelle points de distance fractionnaires (sur la figure 356 désignés par D_2, D_3, D_n). Ces points reposent sur la ligne d'horizon et sont éloignés du point principal P à une distance égale respectivement à $\delta/2$, $\delta/3$ et δ/n (δ étant la distance principale; n, un nombre quelconque).

Supposons qu'une place insuffisante nous oblige à utiliser le point de distance fractionnaire D_2. Dans ce cas on porte sur l'échelle

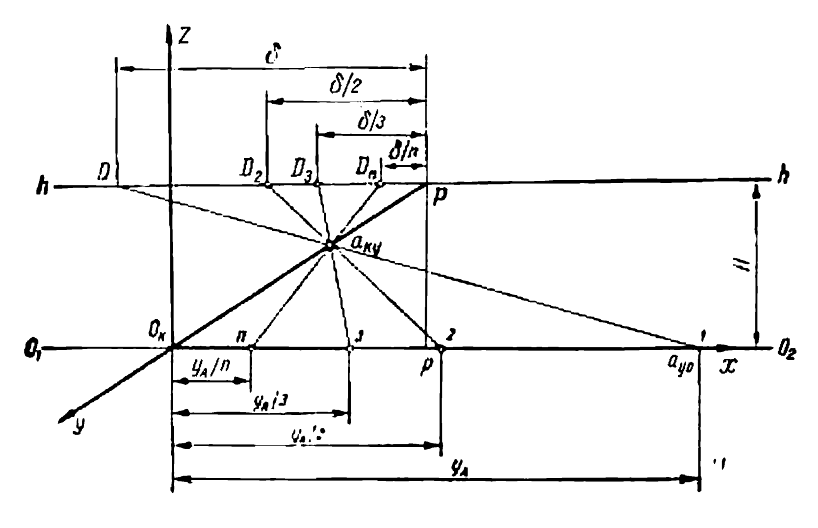


Fig. 356

des largeurs des segments dont la longueur est égale à la moitié de l'éloignement y.

L'intersection de la droite $2D_2$ et de l'échelle des profondeurs détermine le même point a_{Ky} qu'on peut obtenir à l'aide des droites Da_{yO}, $D_3 3$ ou $D_n n$.

Il en est ainsi en raison de la proportionnalité des segments exprimée par les égalités suivantes

$$\frac{O_K a_{Ky}}{a_{Ky} P} = \frac{y_A}{\delta} = \frac{y_A/n}{\delta/n}.$$

§ 71. Quelques exemples de construction d'une perspective

Les exemples donnés dans le présent paragraphe illustrent certaines particularités de constructions auxquelles on recourt fréquemment dans l'établissement des images perspectives des figures planes et des corps tridimensionnels. C'est ainsi qu'on emploie souvent la division perspective d'un segment dans un rapport donné. Considé-

rons la figure 357 sur laquelle le segment A_KB_K est divisé dans le rapport $m : n$. Cette construction repose sur le fait qu'aux segments égaux d'une droite parallèle au tableau correspondent des segments égaux sur l'image de cette même droite. On divise au préalable la projection secondaire du segment dans le rapport $m : n$. A cet effet, on mène par une de ses extrémités une droite parallèle à la ligne de terre et on y porte à partir du point a_K des segments proportionnels

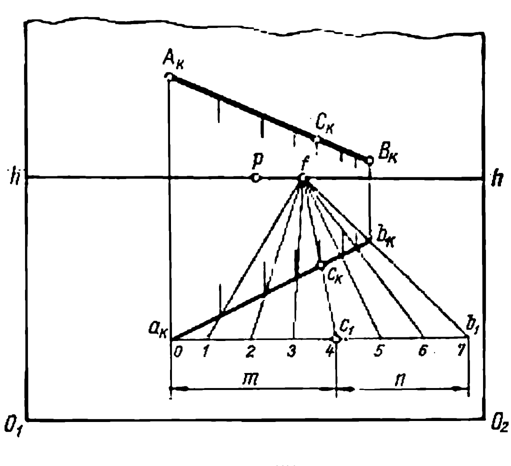


Fig. 357

à m et à n (sur la fig. 357, $a_Kc_1 = m$ et $c_1b_1 = n$). On joint ensuite les points b_1 et b_K et prolonge la droite b_1b_K jusqu'à son intersection en f avec la ligne d'horizon.

Le point cherché c_K sur la projection secondaire a_Kb_K est déterminé à l'aide de la droite fc_1, car les droites b_1b_K et c_1c_K sont les images des droites parallèles qui reposent sur le terrain. Il reste à trouver l'image du point c_K suivant sa projection secondaire, ce qu'on réalise à l'aide de la droite verticale c_KC_K. La figure 357 montre en même temps la division perspective du segment en sept parties égales.

E x e m p l e 1. *Déterminer le centre de symétrie d'un rectangle.* Sur la figure 358 le rectangle est représenté dans le plan frontal (*a*) et horizontal (*b*). Le centre cherché (point ω_K) se trouve au point d'intersection des diagonales.

E x e m p l e 2. *Image d'une circonférence.* La circonférence contenue dans le terrain est représentée sur la figure 359.

La construction de l'image d'une circonférence doit être précédée de celle de l'image d'un carré dont les côtés sont respectivement parallèles et perpendiculaires au tableau. Des huit points représentés sur la figure 359, les points pairs se situent aux milieux des côtés du carré, et les points impairs, sur les diagonales. Notons que les milieux des côtés perpendiculaires au tableau sont déterminés par une droite qui passe par le centre de symétrie du carré ω_K. Pour construire l'image d'une circonférence les dimensions linéaires sont doublées.

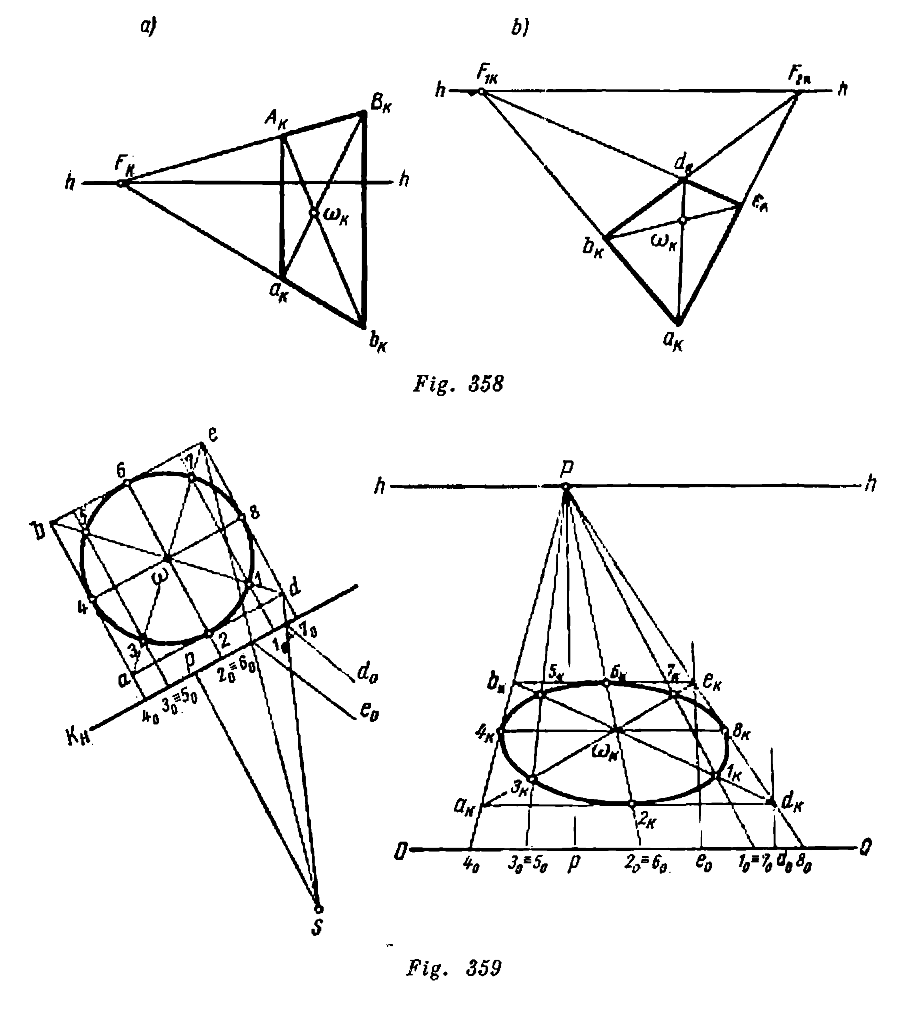


Fig. 358

Fig. 359

La circonférence contenue dans le plan vertical s'obtient d'une manière analogue. Le rectangle $a_K A_K B_K b_K$ de la figure 360 représente l'image d'une moitié du carré dans laquelle il faut inscrire l'arc d'une demi-circonférence.

Le centre de cet arc (point O_K) et le milieu du côté $A_K B_K$ (point 2_K) s'obtiennent comme dans le cas précédent à l'aide d'une droite menée par le centre de symétrie du rectangle (point R_K).

Les points 1_K et 3_K où la circonférence cherchée coupe les demi-diagonales du carré ($O_K A_K$ et $O_K B_K$) sont construits par division perspective des segments dans le rapport donné.

Le rapport du diamètre de la circonférence inscrite à la diagonale du carré étant $1 : \sqrt{2} \approx 7 : 10$, il est le même pour le rayon de cette circonférence et la demi-diagonale du carré.

D'abord à l'aide d'un triangle rectangle isocèle $A_K M a_K$ on divise dans le rapport donné le segment vertical $A_K a_K$ $\left(\frac{a_K N}{a_K A_K} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La droite NF_K parallèle à $A_K B_K$ divise ensuite dans le même rapport les demi-diagonales du carré.

Exemple 3. *Construire les baies de fenêtres et de portes.*

La construction des baies de fenêtres et de portes peut être nettement simplifiée par l'application de la division des images d'un segment en parties proportionnelles. Sur l'élévation de l'édifice (fig. 361,*b*) on établit à cet effet un réseau de lignes horizontales et verticales menées par les angles (sommets) des

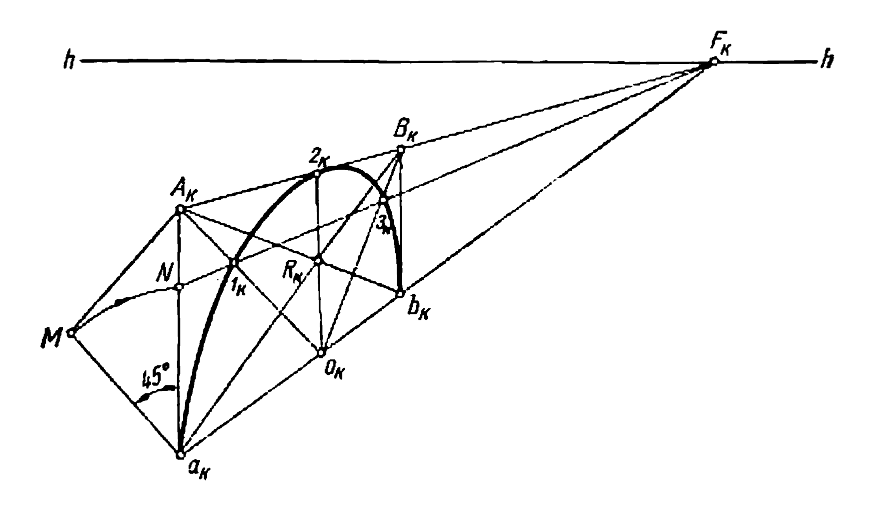


Fig. 360

contours des fenêtres et des portes. La construction du réseau sur le tableau peut s'effectuer dans l'ordre suivant.

1. Appliquer sur le segment $a'A'$ (sur l'élévation) une bande de papier et marquer sur cette bande les points a', 1_0, 2_0, 3_0 et A' par lesquels passent les lignes horizontales du réseau.

2. Reporter la bande de papier sur le tableau de façon qu'elle compose avec la droite $a_K A_K$ un angle quelconque et que le point a' se confonde avec le point a_K.

3. Mener par les points 1_0, 2_0 et 3_0 de l'image de la façade (fig. 361,*a*) des droites parallèles à la droite $A'A_K$ jusqu'à leur rencontre avec $a_K A_K$.

4. Joindre les points 1_K, 2_K et 3_K au point de fuite gauche F_{1K} pour obtenir les images des droites horizontales du réseau.

5. La construction des lignes verticales du réseau impose la division perspective en parties proportionnelles de l'image du segment $a_K b_K$. Dans ce but, mener la droite $a_K b'$ parallèlement à hh et y reporter à l'aide de la bande de papier les points 4_0, 5_0, 6_0, . . ., 11_0, b'.

Le prolongement de la droite $b'b_K$ jusqu'à son intersection avec la ligne d'horizon donne la position du point de fuite d'un faisceau de droites parallèles à l'aide desquelles on obtient sur le segment $a_K b_K$ les points 4_K, 5_K, 6_K, ..., 11_K.

Les lignes verticales du réseau passent par les points trouvés et coupant les horizontales correspondantes déterminent les contours des baies des fenêtres et des portes.

E x e m p l e 4. *Mettre en perspective un pont en arc en béton armé.*

Les projections orthogonales d'un pont sont représentées sur la figure 362. La même figure montre également la trace horizontale du plan du tableau (K_H). Les limites du dessin ne permettent pas de marquer la position du point de vue, du point principal et des points de fuite des faisceaux de droites parallè-

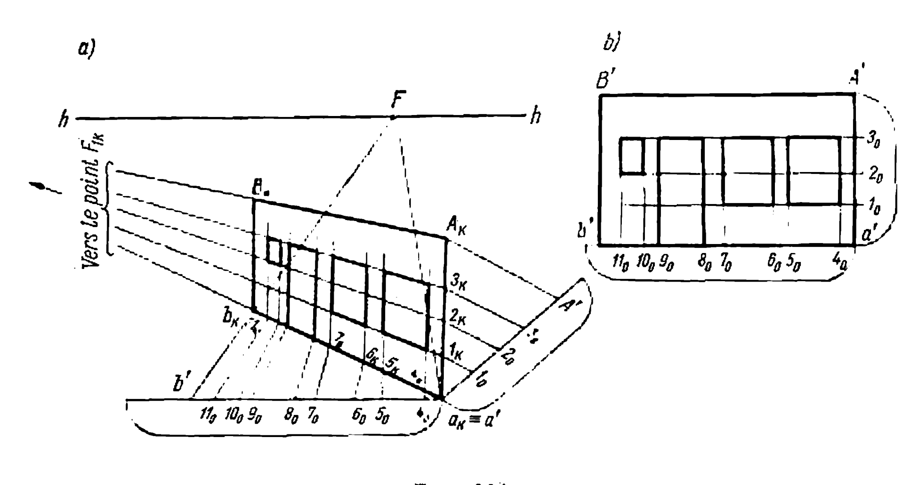


Fig. 361

les. Le contour extérieur de la projection secondaire sur le plan abaissé et l'image du pont lorsque la hauteur de l'horizon est nulle sont donnés sur la figure 363.

Les renseignements nécessaires pour l'exécution de cette construction sont donnés au § 70.

Indiquons les particularités de la mise en perspective d'un pont en arc dont le contour est situé dans le plan vertical Q.

Sur les figures 362 et 363, la trace horizontale de ce plan Q_T est donnée en pointillé. Par le point $\bar{n}_0$ de la ligne de terre abaissée (droite O_3O_4) on mène la droite verticale Q_K qui est la ligne d'intersection de Q et de K. L'image ainsi construite du réseau des droites horizontales et verticales permet de déterminer les points du contour de l'arc.

Les détails de la construction de l'image d'un réseau ont été exposés dans l'exemple 3; notons seulement ici que les hauteurs des points H_1, H_m, H_a, H_b, etc., sont portées sur la droite Q_K depuis le point n_0 (à partir de la ligne d'horizon).

Pour construire le contour de l'arc situé dans le plan Q_1, on peut utiliser les points de ce plan déjà trouvés.

Ainsi, sur la figure 363 les points C_K et R_K situés dans le plan Q_1 ont été obtenus à l'aide des rayons menés vers le point de fuite F_{2K} par les points A_K et M_K qui appartiennent au plan Q.

Les droites verticales menées par les projections secondaires des points (c_K et r_K) déterminent sur ces rayons la position des points C_K et R_K.

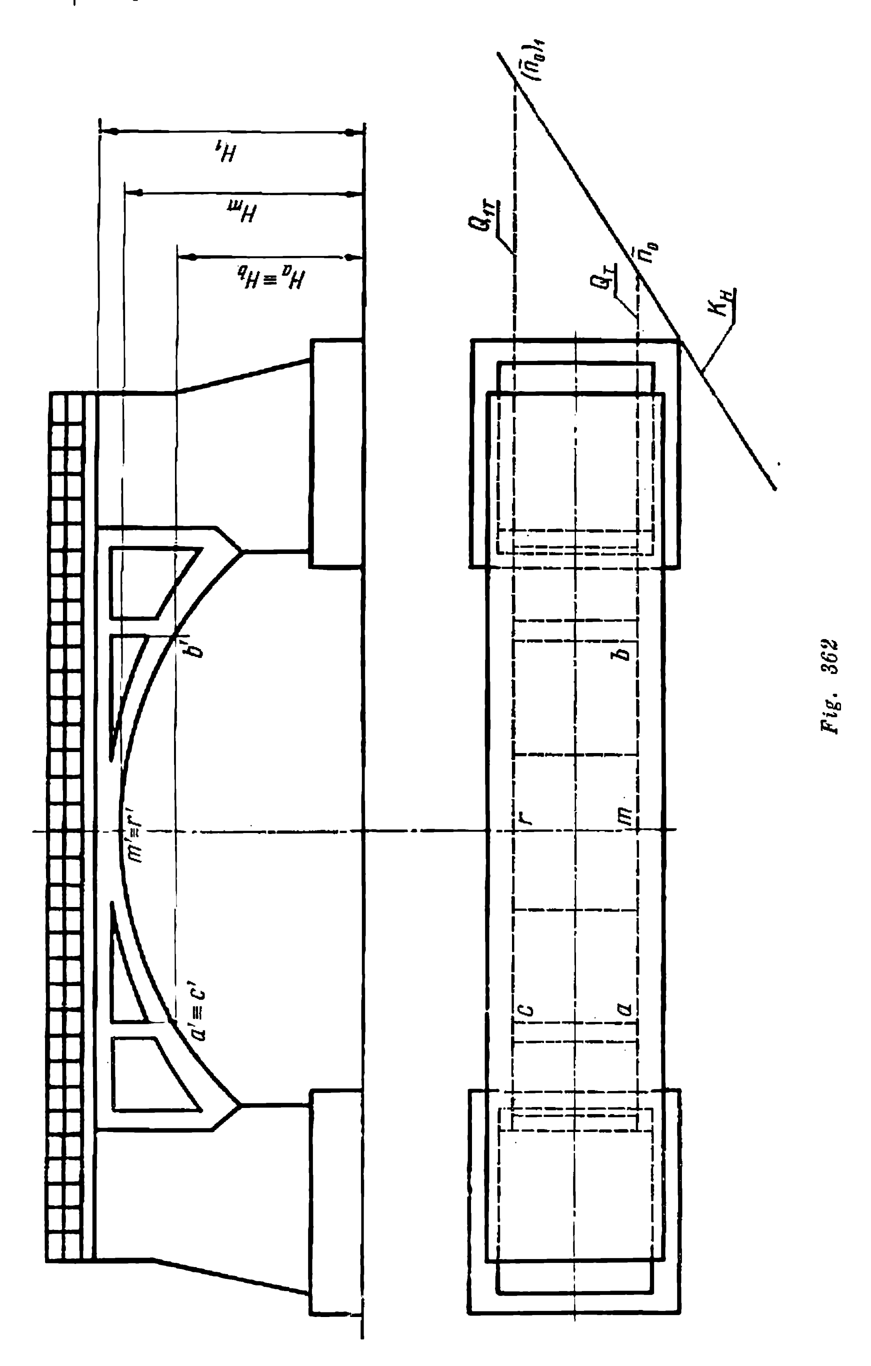


Fig. 362

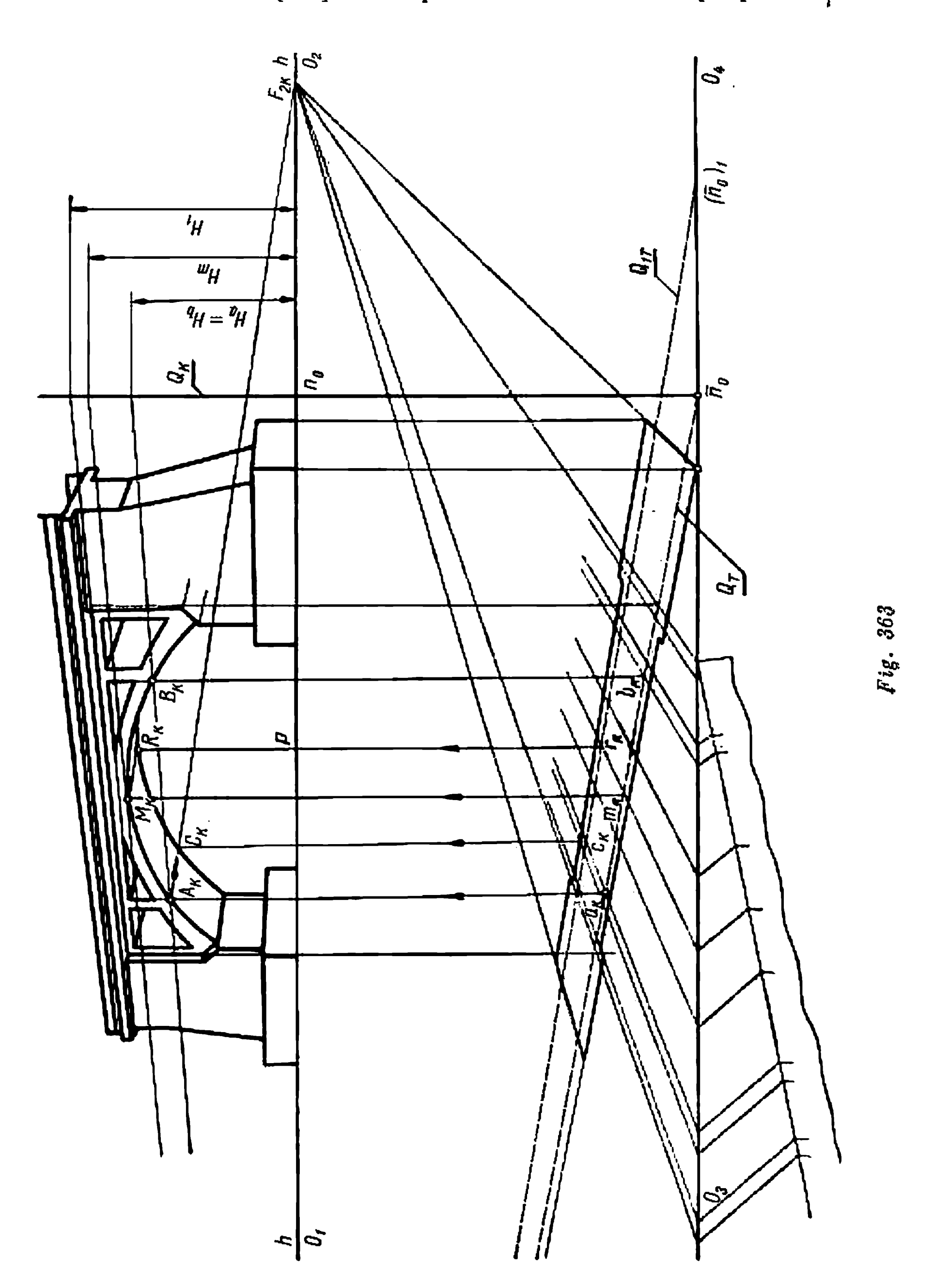


Fig. 363

§ 72. Problèmes métriques de la perspective linéaire

Voici la solution de certains problèmes métriques.

Problème 1. *Déterminer la vraie longueur du segment AB dont l'image et la projection secondaire sont données par la figure* 364.

Considérons d'abord la solution de ce problème sur la figure 365 qui donne l'image suggestive du segment AB et de sa projection horizontale ab dans le système de plans d'une perspective linéaire. Pour

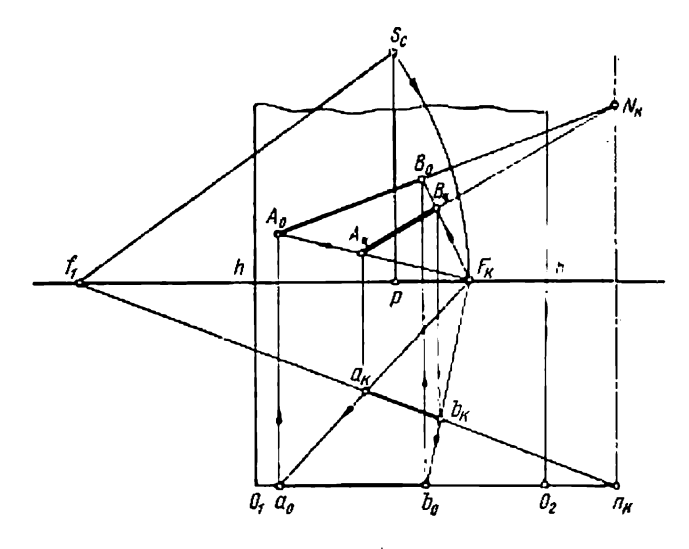


Fig. 364

trouver la longueur cherchée on rabat le segment AB sur le tableau en prenant comme charnière la droite $I—I_1$. Cette charnière doit appartenir au tableau et passer par le point N_K (origine de la droite AB) où le prolongement du segment perce K. Lorsque la charnière est verticale, les extrémités du segment AB se déplacent suivant les arcs de circonférences horizontales. Sur le terrain les projections horizontales des extrémités du segment décrivent également des arcs de circonférence.

Les déplacements angulaires des extrémités du segment AB étant égaux, les cordes AA_0 et BB_0 sont parallèles entre elles. Et puisque chacune d'elles est horizontale, leurs projections aa_0 et bb_0 sont parallèles aussi.

Pour construire les images des cordes parallèles, il faut déterminer leur point de fuite commun F_K. Ce dernier se trouve à l'aide du rayon SF_K parallèle aux cordes AA_0 et BB_0. Pour construire le point

F_K sur le tableau on utilise le segment SF_K, base d'un triangle isocèle SF_Kf_1, dont le sommet f_1 est la projection secondaire du point à l'infini du segment donné AB. En effet, considérons la figure 366 qui donne la vue d'en haut du système des plans de la perspective linéaire et examinons les triangles aa_0n_K et sF_Kf_1. Les côtés du deuxième triangle étant respectivement parallèles aux côtés du premier,

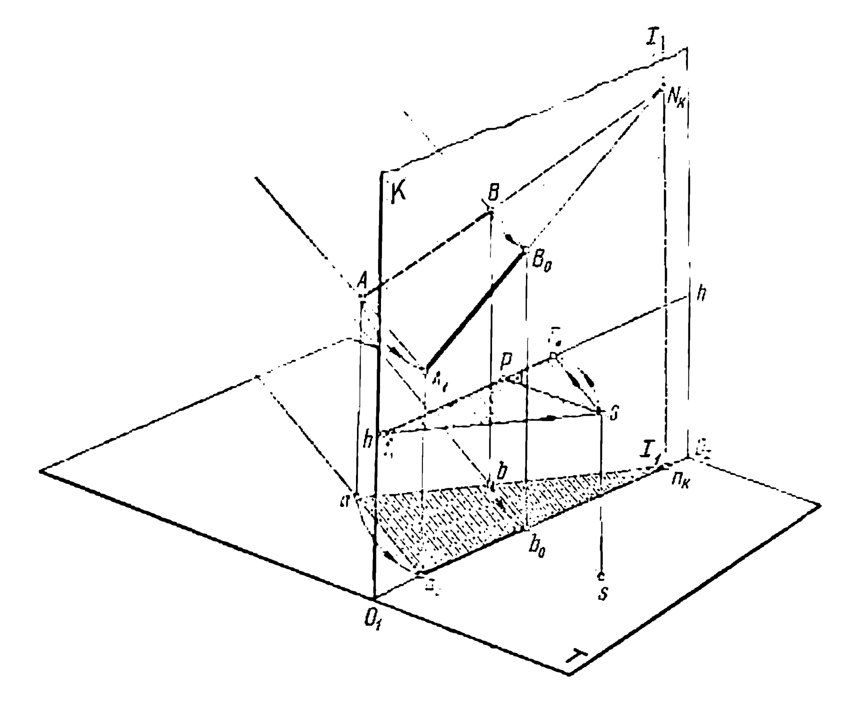


Fig. 365

ils sont semblables. Mais le triangle aa_0n_K est isocèle ($n_Ka = n_Ka_0$), et le deuxième triangle sF_Kf_1 est donc également isocèle. On rabat ce triangle sur le tableau en le faisant tourner comme sur une charnière autour de la ligne d'horizon sur laquelle se reposent les sommets f_1 et F_K. Le premier d'entre eux est déterminé par l'intersection de la projection secondaire du segment a_Kb_K avec la ligne d'horizon (voir fig. 364 à laquelle se rapportent également les explications qui suivent). Le deuxième point est celui que nous cherchons. Le point de vue S_C rabattu sur le tableau se trouve sur la perpendiculaire à la ligne d'horizon et se confond avec le tableau, et, de plus, le segment S_CP est égal à la distance principale considérée comme imposée. En menant du point f_1 comme d'un centre un arc de rayon f_1S_C

on obtient sur la ligne d'horizon F_K, point de fuite des cordes parallèles. Après avoir construit les images de ces cordes ($F_K A_K$ et $F_K B_K$) et leurs projections secondaires ($F_K a_K$ et $F_K b_K$), on trouve les points A_0 et B_0 où les cordes percent le plan du tableau (origines des cordes). Le segment $A_0 B_0$ est l'élément cherché. Il est d'usage d'appeler

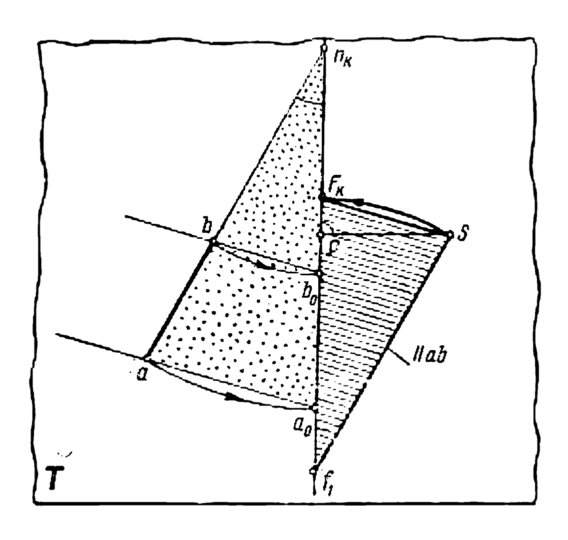


Fig. 366

les cordes AA_0 et BB_0 (voir fig. 365) lignes d'égales sections, car elles coupent le segment considéré et le tableau en points équidistants les uns des autres ($AB = A_0 B_0$).

Problème 2. *Trouver la vraie grandeur de l'angle BAE* (fig. 367 et 368).

On mène à partir du point de vue S deux rayons SF_K et SF_{1K} respectivement parallèles aux côtés de l'angle (voir fig. 367). Il est clair que l'angle entre les rayons est égal à l'angle donné. On rabat le plan de l'angle $F_K S F_{1K}$ sur le tableau en prenant pour charnière la droite $F_K F_{1K}$ (points F_K et F_{1K} étant les points de fuite des côtés de l'angle considéré).

Alors, la projection orthogonale du sommet de l'angle $F_K S F_{1K}$ (point S) sur le plan du tableau se déplace suivant la perpendiculaire à la droite $F_K F_{1K}$. Quand il se confond avec le tableau, la distance entre le point S et la droite $F_K F_{1K}$ est égale au rayon de rotation. Le problème posé revient précisément à déterminer ce rayon. Le rayon recherché R_S est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont la distance principale SP et le segment PM_K perpendiculaire

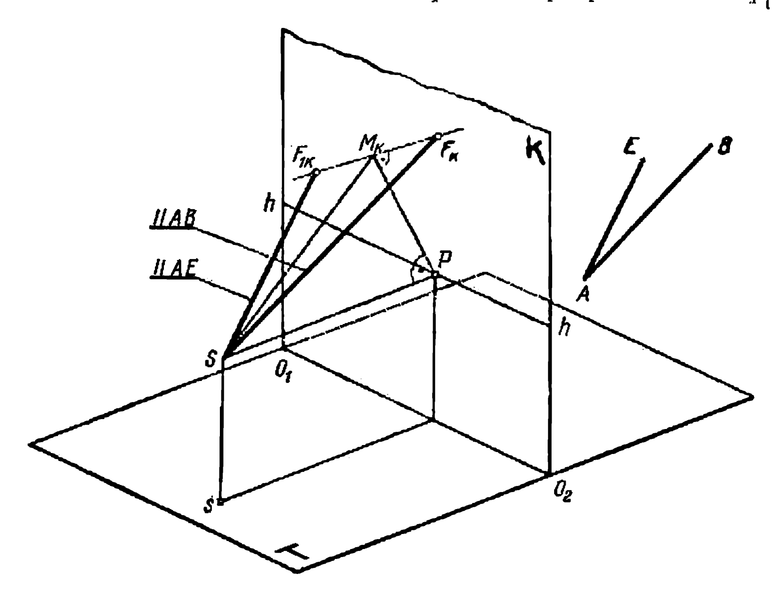


Fig. 367

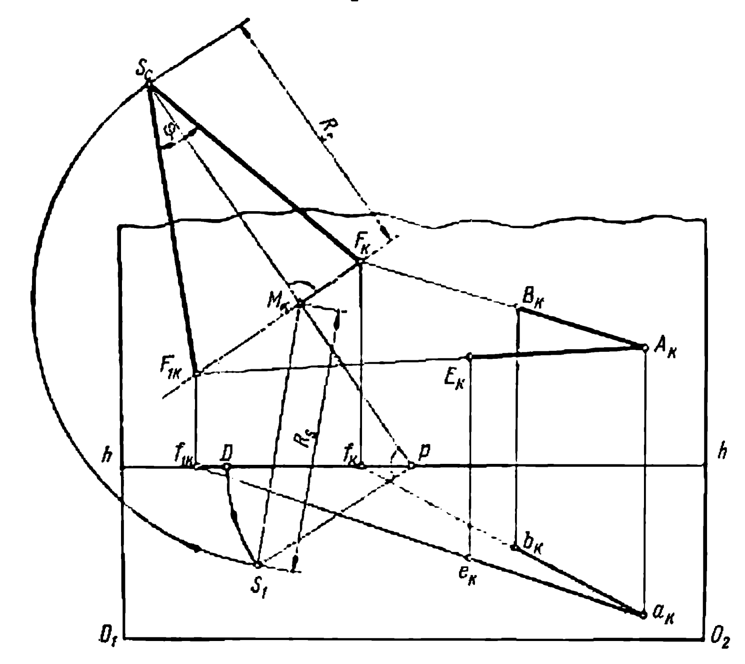


Fig. 368

à la charnière. C'est précisément le triangle $M_K P S_1$ construit sur la figure 368. Son côté PS_1 est égal à la distance principale donnée sur le tableau par le segment PD (le point D est le point de distance). Le sommet (S_C) de l'angle rabattu sur le tableau est déterminé sur la figure 368 par l'intersection de la droite PM_K avec l'arc de rayon R_S tracé à partir du point M_K pris comme centre.

Problème 3. *Mettre en perspective un carré qui repose sur le terrain T, l'image de son côté $(A_K B_K)$ étant donnée* (fig. 369).

Pour résoudre ce problème on détermine d'abord les points de fuite des côtés opposés du carré. Les deux points F_K et F_{1K} reposent

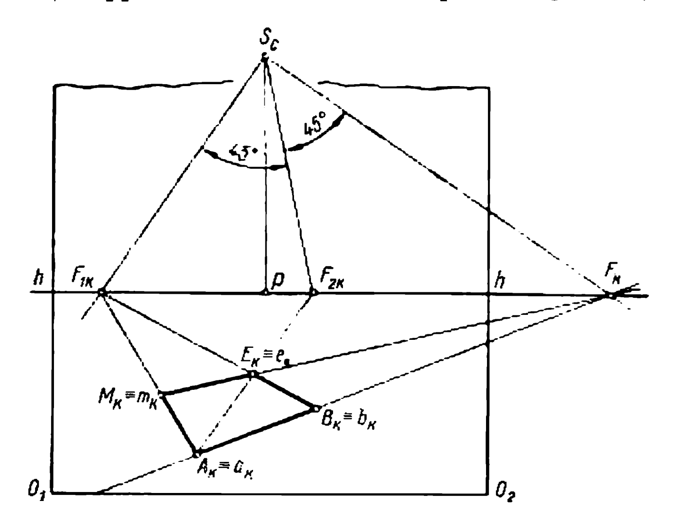


Fig. 369

sur la ligne d'horizon. Pour obtenir le premier d'entre eux il suffit de prolonger le segment donné $A_K B_K$ jusqu'à sa rencontre avec la ligne d'horizon. Pour construire le deuxième on rabat sur le tableau le point de vue S et on mène par ce point deux droites perpendiculaires $S_C F_K$ et $S_C F_{1K}$. Les deux droites peuvent être considérées comme des rayons rabattus sur le tableau et allant du point de vue S vers les points à l'infini des côtés du carré qui se coupent également sous un angle droit. Le point trouvé F_{1K} permet de construire les images des droites perpendiculaires à $A_K B_K$. Il reste à déterminer sur une des lignes ainsi construites le troisième sommet du carré. Pour cela, on trace la bissectrice $S_C F_{2K}$ de l'angle droit $F_K S_C F_{1K}$ qu'on considère comme un rayon rabattu sur le tableau dirigé du point de vue S parallèlement à la diagonale du carré qui passe par le sommet A_K de l'angle droit construit. Ce rayon (bissectrice de l'angle droit)

rencontre la ligne d'horizon en F_{2K}. Ce point constitue justement le point de fuite de la diagonale du carré. La diagonale permet de trouver le troisième sommet du triangle E_K. L'intersection des droites $A_K F_{1K}$ et $E_K F_K$ donne le quatrième sommet M_K de la figure cherchée.

Exercices

1. On donne les projections orthogonales du système de plans d'une perspective linéaire et du segment AB (fig. 370). Construire l'image et la projection

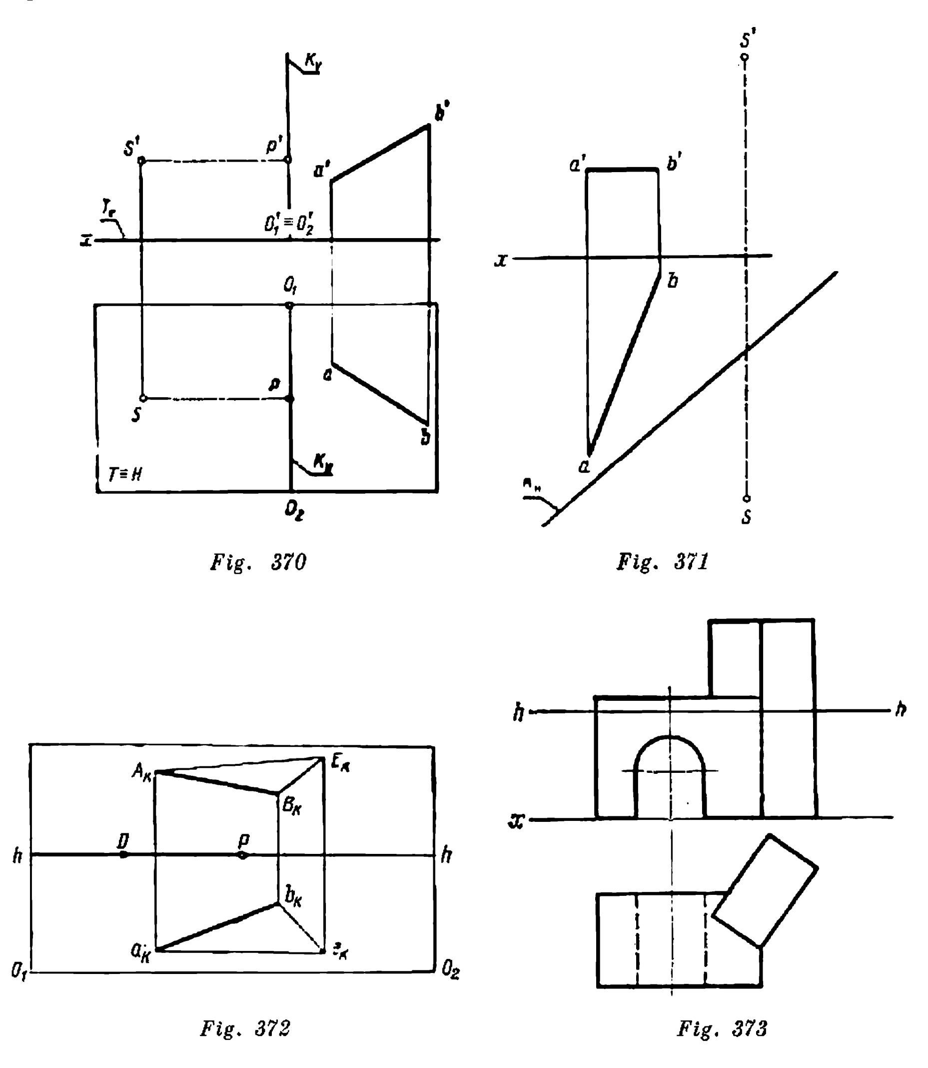


Fig. 370 *Fig. 371*

Fig. 372 *Fig. 373*

secondaire de ce segment. Trouver deux points figuratifs de la droite (origine et point à l'infini).

2. Résoudre un problème analogue au précédent mais rapporté à un segment horizontal *AB* (fig. 371).

3. Mener par un point donné *E* une droite parallèle à une droite *AB* (fig. 372).

4. Déterminer l'image du centre de gravité d'un triangle *ABE* (fig. 372).

5. Construire par la méthode de deux points de fuite l'image d'un ensemble de corps géométriques, la ligne d'horizon étant donnée (fig. 373).

6. On donne l'image et la projection secondaire d'une des diagonales de parallélépipède droit dont la base repose sur le terrain, alors que la face avant est parallèle au plan du tableau. Construire l'image du parallélépipède et déterminer les vraies grandeurs de ses arêtes et de sa diagonale.

7. Mener par un point *E* du terrain une droite qui forme un angle de 60° avec une autre droite *AB* du terrain.

CHAPITRE XIV

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DANS LES PROJECTIONS CENTRALE ET PARALLÈLE

§ 73. Généralités

Une transformation géométrique peut être réalisée de façons différentes. Les transformations ponctuelles que l'on considère le plus souvent consistent à faire correspondre à chaque point d'une figure un point déterminé d'une autre. Dans la transformation ponctuelle chaque figure dite *antécédent*, considérée comme un ensemble des points, est modifiée en une nouvelle figure appelée *transformé* de la première figure.

Les points qui correspondent l'un à l'autre s'appellent *points en correspondance homologique.* Les droites et les segments déterminés par ces points sont dits également en correspondance homologique.

La construction qui permet d'obtenir à partir de la figure donnée une figure nouvelle s'appelle *transformation par correspondance homologique* de la figure géométrique.

L'exemple d'une telle transformation est fourni par la symétrie axiale et centrale, ainsi que par l'homothétie, étudiées en géométrie plane.

Toute transformation géométrique d'une figure entraîne la modification de sa forme et des dimensions de ses parties. Mais il y a des propriétés des figures qui ne changent pas lors de leur transformation.

Les propriétés des figures qui restent inchangées lors d'une transformation sont dites invariants de la transformation donnée. Les invariants qui s'observent, par exemple, dans la transformation des figures planes lors de la projection parallèle d'un plan sur un autre sont : 1) *rectilignité des segments* ; 2) *parallélisme des droites* ; 3) *rapport des segments d'une même droite* ; 4) *rapport des segments de deux droites parallèles* (voir la démonstration au § 3).

Ces invariants sont caractéristiques non seulement de la projection parallèle, mais encore de certaines autres transformations géométriques, et notamment de celles d'homothétie.

Les transformations définies par ces invariants s'appellent transformations affines.

La projection parallèle en est un cas particulier.

La correspondance établie entre les figures par la projection parallèle est dite *affine.*

Dans le cas de non-parallélisme des plans d'antécédent et de transformé, la projection centrale donne non pas une transformation affine mais une transformation plus générale, dite *projective.*

Pour établir une correspondance ponctuelle biunivoque entre deux plans d'une projection centrale, l'espace et le plan de la géométrie euclidienne sont complétés par des éléments à l'infini associés aux notions nouvelles d'espace projectif et de plan projectif.

§ 74. Plan et espace projectifs

Le plan et l'espace étudiés en géométrie élémentaire portent le nom du géomètre de l'Antiquité Euclide.

Dans le cas d'une projection centrale (perspective), un espace euclidien n'assure pas une correspondance ponctuelle biunivoque totale des deux plans.

La figure 374 montre la projection à partir du point S (centre de projection) de la figure F_1 contenue dans le plan P_1 en la figure F contenue dans le plan P.

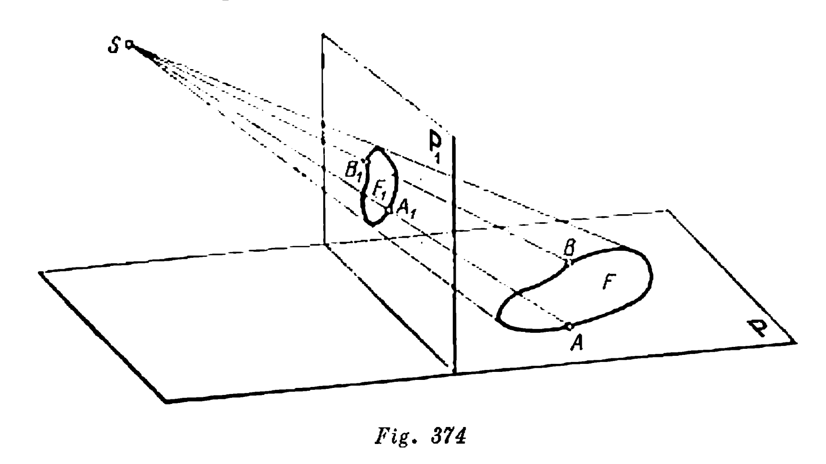


Fig. 374

Les points des figures F_1 et F sont en correspondance biunivoque. Ainsi à tout point A de la figure F correspond un point A_1 de la figure F_1 dit son homologue. Et réciproquement, à tout point B_1 de la figure F_1 correspond un point B de la figure F.

Pourtant dans un espace euclidien on ne parvient pas à extrapoler cette proposition à tous les points des plans P et P_1.

En effet, considérons dans le plan P_1 un point K_1 situé sur le rayon SK_1 parallèle au plan P (fig. 375). Ce rayon n'a pas de point de rencontre avec le plan P.

Donc le point K_1 du plan P_1 n'a pas d'homologue dans le plan P.

Traçons maintenant par le centre de projection S un rayon parallèle au plan P_1 qui perce le plan P en L. Il est impossible de trouver à ce point L du plan P un antécédent dans le plan P_1.

Cette circonstance impose de compléter le plan euclidien de nouveaux éléments dits *éléments à l'infini*. On est conduit ainsi à la formation d'un nouveau être géométrique dit *plan projectif*.

Dans ces conditions chaque droite est complétée par un point à l'infini; les droites parallèles sont complétées par un point à l'infini

commun, et les droites non parallèles, par des points à l'infini différents ; tous les points à l'infini appartiennent à une droite à l'infini.

A la différence des points à l'infini tous les points d'un plan euclidien sont dits finis.

Les droites d'un plan euclidien complétées de points à l'infini s'appellent des droites à l'infini.

Ainsi, *un plan euclidien complété par un point à l'infini est dit projectif.*

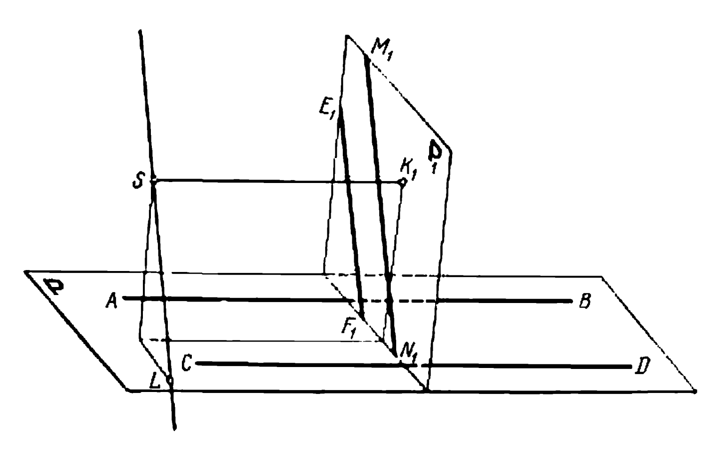


Fig. 375

Un plan projectif vérifie les propositions suivantes : 1) par deux points quelconques passe une droite et une seule ; 2) deux droites quelconques ont un point commun et un seul.

D'une manière analogue, un *espace projectif* s'obtient à partir d'un espace euclidien par l'addition de points à l'infini, de droites à l'infini et d'un plan à l'infini. Dans un espace projectif, comme dans un plan, deux droites quelconques d'un même plan se coupent toujours. Dans un espace projectif, l'intersection de deux plans quelconques est une droite. Enfin, toute droite qui ne repose pas dans un plan le perce toujours.

Lorsqu'un espace euclidien est complété jusqu'à un espace projectif, dans la projection centrale, la correspondance entre les plans P et P_1 (voir fig. 375) devient biunivoque : un point K_1 du rayon SK_1 parallèle au plan P a pour le point en correspondance homologique un point à l'infini du plan P, ajouté aux droites AB et CD du plan P, parallèles au rayon SK_1. L'antécédent du point L du plan P est un point à l'infini des droites E_1F_1 et M_1N_1 menées dans le plan P_1 parallèlement au rayon SL.

Après avoir défini un espace qui rend possibles toutes projections sans aucune exception, passons à l'étude de la correspondance de deux figures planes obtenue par la projection parallèle.

§ 75. Affinité

La correspondance établie entre les figures par la projection parallèle est dite *affinité*.

L'affinité possède les propriétés suivantes :

1) à tout point A d'un plan correspond un point affine A_1 du deuxième plan (fig. 376) ;

2) à toute droite AB d'un plan correspond une droite affine A_1B_1 du deuxième plan ;

3) les droites joignant les points affines sont parallèles ;

4) les droites affines AB et A_1B_1 se coupent sur l'axe d'affinité constitué par la ligne d'intersection O_1O_2 des plans considérés P et P_1.

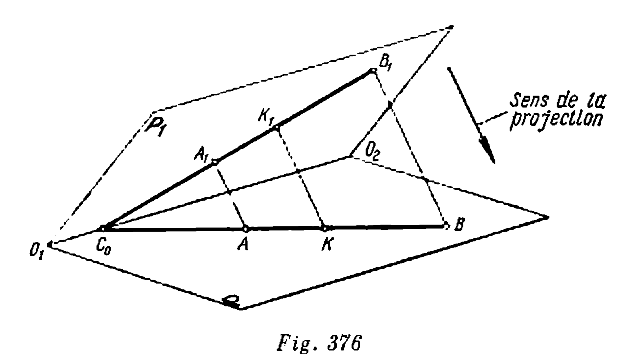


Fig. 376

Cet axe est le lieu géométrique des points dont chacun correspond à lui-même. De tels points s'appellent points doubles. La droite AB est aussi double ;

5) l'affinité conserve l'appartenance des points aux droites, c'est-à-dire si le point K appartenait à la droite AB, le point affine K_1 appartient à la droite affine A_1B_1 ;

6) les droites parallèles d'un plan correspondent aux droites parallèles de l'autre ;

7) le rapport des segments d'une droite ou des droites parallèles est égal au rapport des segments affines.

Dans la géométrie descriptive les propriétés énoncées s'emploient généralement pour représenter les corps et les figures planes sur les dessins géométraux.

L'affinité, établie entre deux plans de projection lors de la projection parallèle, se conserve lors de leur rabattement.

Mais dans ce cas, les droites qui joignent les points affines déterminent non pas la direction de projection, mais la direction d'affinité.

L'affinité de deux plans confondus peut être donnée par l'axe d'affinité O_1O_2 et par deux points A et A_1 en correspondance homologique (fig. 377). Pour trouver le point B_1 affine d'un point arbitraire B, on mène la droite AB et on marque le point de son intersection C_0 avec l'axe d'affinité. Les points C_0 et A_1 déterminent la droite affine à la droite AB. La droite A_1C_0 porte le point cherché B_1 qu'on trouve en traçant la droite BB_1 parallèlement à AA_1 (direction d'affinité).

Lorsque la droite AB coupe l'axe d'affinité en dehors du dessin (fig. 378), le même problème peut être résolu d'une façon différente. On fait passer par le point A une droite quelconque AC_0 qui

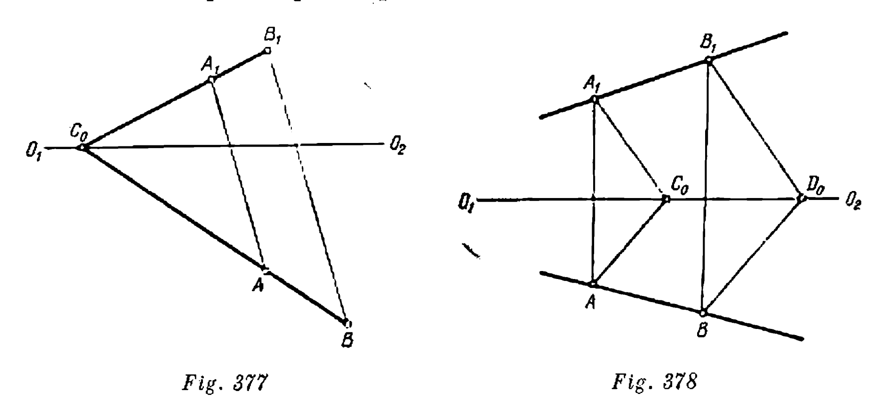


Fig. 377 *Fig. 378*

dans les limites du dessin coupe l'axe d'affinité et on construit la droite qui lui est affine C_0A_1. On mène ensuite par le point B la droite BD_0 parallèle à AC_0 et une droite affine D_0B_1 parallèle à C_0A_1 (aux droites parallèles correspondent des droites parallèles). La droite qui passe par le point B parallèlement à la direction d'affinité coupe la droite D_0B_1 au point cherché.

La construction qui vient d'être décrite s'emploie dans le cas où il faut mener la droite A_1B_1 par le point de fuite inaccessible de deux autres droites (point d'intersection des droites AB et O_1O_2).

Un exemple d'affinité des figures peut être fourni par une figure donnée et son ombre portée sur un certain plan. La figure 379 représente la construction de l'ombre d'une figure située dans le plan P_1, jetée sur un plan oblique P. L'ombre du point A_1 sur le plan P a été donné (point A). Ayant deux points homologues A_1 et A et l'axe d'affinité O_1O_2, il n'est pas difficile de trouver les points C, D, E en affinité avec les points C_1, D_1, E_1. Pour déterminer ces points on reprend les constructions de la figure 378. Ainsi le point C en affinité avec C_1 se trouve à l'aide des droites C_1C_0 et C_0C respecti-

vement parallèles aux droites A_1A_0 et A_0A. Les ombres d'autres points sont construites d'une manière analogue.

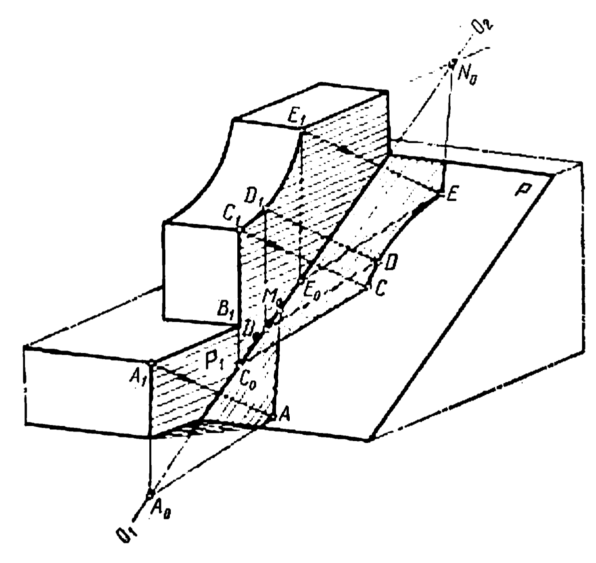


Fig. 379

Un autre exemple de figures affines est donné par l'image de la figure et sa projection secondaire (fig. 380).

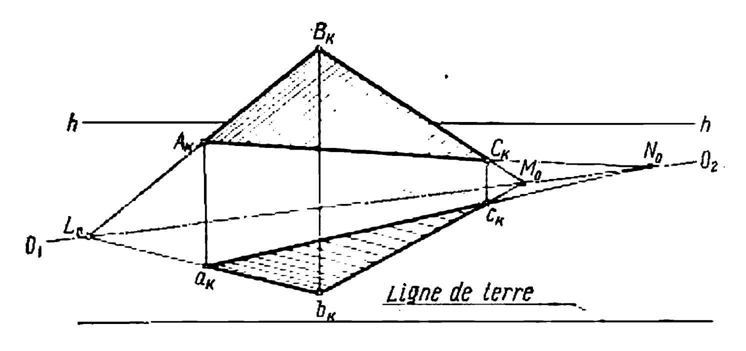


Fig. 380

En effet, dans la correspondance considérée, les points affines des figures sont les perspectives A_K, B_K, C_K et les projections secondaires a_K, b_K, c_K de ces mêmes points de l'espace. Mais on sait que l'image d'un point et sa projection secondaire se trouvent toujours

sur la même perpendiculaire à la ligne de terre. Il en résulte que les droites joignant chaque couple de points affines sont parallèles entre elles (elles se coupent en un point à l'infini). L'application du théorème de Desargues à un plan permet de déduire que les trois points L_0, M_0 et N_0 de l'intersection des trois couples de côtés affines des triangles $A_K B_K C_K$ et $a_K b_K c_K$ reposent sur le même axe d'affinité $O_1 O_2$. Cet axe est l'image de la ligne d'intersection du terrain et du plan contenant le triangle.

D'une manière analogue on peut démontrer que les projections orthogonales d'une figure plane présentent la même propriété d'affinité.

La direction d'affinité dans ce cas est perpendiculaire à l'axe Ox. L'axe d'affinité passe par les points d'intersection des droites affi-

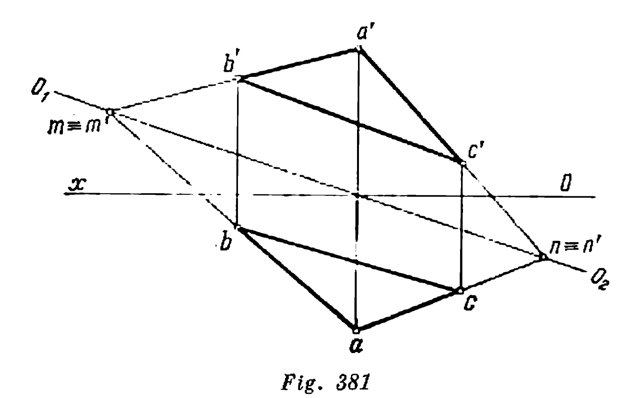


Fig. 381

nes, points M et N de la figure 381. Le premier d'entre eux est déterminé par l'intersection de ab et $a'b'$, le deuxième est le point d'intersection de ac et $a'c'$.

La coïncidence des projections horizontale m et frontale m' montre que le point M est équidistant des plans H et V et se trouve dans le deuxième quadrant. Le point N est également équidistant des plans de projection, mais il se trouve dans le quatrième quadrant. On en déduit que les points M et N déterminent la ligne d'intersection du plan du triangle et du plan bissecteur du deuxième et du quatrième quadrants. Cette droite est justement l'axe d'affinité.

On a donc établi sur l'épure l'existence d'une affinité entre les projections horizontale et frontale des points d'un plan quelconque.

Les figures appartenant aux plans projetants ne justifient pas une correspondance de ce type, car une des projections de la figure dégénère alors en droite.

L'usage des lois d'affinité permet de résoudre différents problèmes relatifs aux projections orthogonales.

La figure 382 représente un exemple de détermination d'un point d'intersection de la droite EF avec le plan donné par deux droites parallèles AB et CD, de plus $e'f' \parallel a'b'$.

On trouve d'abord l'axe d'affinité O_1O_2 en tant que ligne d'intersection du plan de deux droites parallèles et du bissecteur du deuxième quadrant. Le problème consiste ensuite à construire un couple de points affines dans la correspondance donnée et disposés sur les droites ef et $e'f'$. Notons que les droites ef et $e'f'$ dans l'affinité donnée ne sont pas affines.

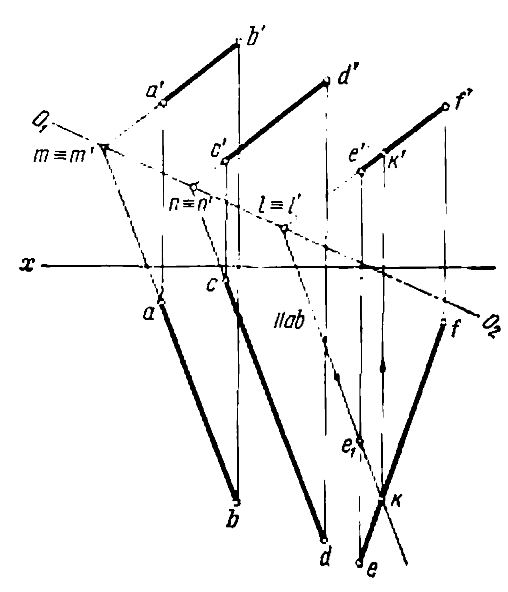


Fig. 382

On construit une droite le_1 en affinité avec la droite $e'f'$. La droite le_1 est tracée parallèlement à ab, car aux droites parallèles $a'b'$ et $l'e'$ doivent correspondre les droites parallèles ab et le_1.

Le point k d'intersection des droites le_1 et ef est un des points cherchés. Son point affine k' se trouve immédiatement à l'aide de la direction d'affinité. Les points ainsi établis sont justement les projections orthogonales du point d'intersection de la droite avec le plan.

L'usage des plans projetants dans le cas considéré (le format du dessin étant limité) aurait rendu la solution beaucoup plus compliquée.

Le procédé décrit permet de résoudre certains problèmes de section plane des polyèdres et des surfaces réglées ; dans ces conditions la détermination de la figure affine à la figure considérée impose l'exécution de plusieurs constructions géométriques du type représenté sur les figures 377 et 378, où l'on trouve pour le point donné B le point affine B_1.

§ 76. Ellipse, figure affine du cercle

La figure affine du cercle est une ellipse.

Soit à construire une ellipse en affinité avec le cercle donné, O_1O_2 étant l'axe d'affinité, D_1 et D deux points affines et C_1 le centre de cercle (fig. 383).

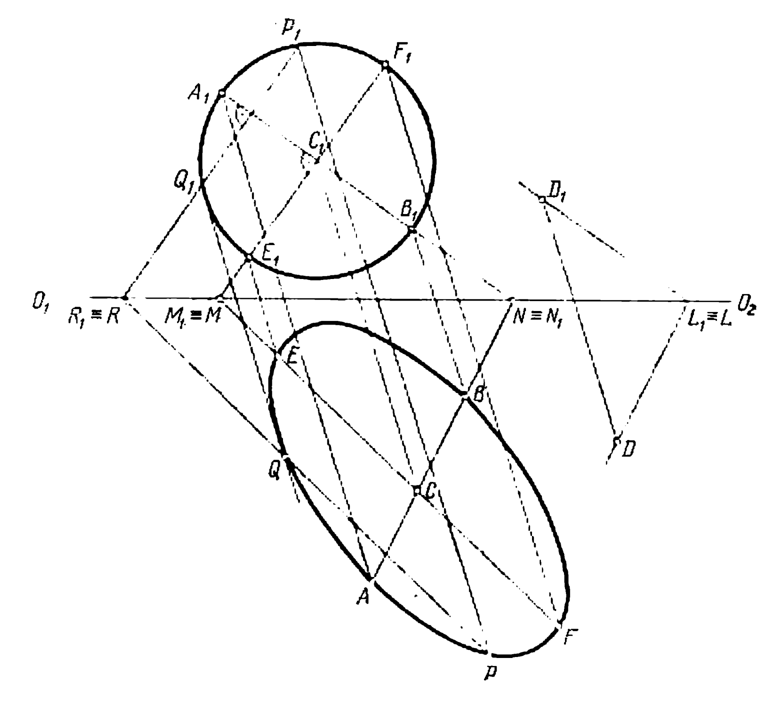


Fig. 383

On trouve d'abord le point C affine du centre du cercle. Après avoir mené par C_1 une droite arbitraire C_1N_1 on construit la droite qui correspond à cette dernière. A cet effet on trace la droite $D_1L_1 \parallel$ $\parallel C_1N_1$, puis on joint les points L et D, et enfin, on mène $NC \parallel LD$. Le point C est déterminé par l'intersection des droites NC et C_1C, dont la deuxième est parallèle à la direction d'affinité D_1D.

On sait que le centre du cercle est son centre de symétrie. C'est le point qui divise par deux tous les diamètres du cercle. La transformation affine du cercle conserve cette propriété, c'est-à-dire qu'une ellipse est également une figure à symétrie centrale. Chaque diamètre d'une ellipse [1] est divisé en son centre C par deux.

Sur la figure 383 le diamètre AB de l'ellipse est construit à l'aide des droites A_1A et B_1B parallèles à la direction d'affinité.

On trace dans le cercle donné un diamètre E_1F_1 perpendiculaire au diamètre A_1B_1 et on construit le diamètre EF d'une ellipse en affinité avec celui du cercle. Les diamètres non perpendiculaires de

[1] On donne le nom de diamètres d'ellipse aux cordes passant par son centre.

l'ellipse ne correspondent pas de fait aux diamètres perpendiculaires du cercle. Mais chaque couple de diamètres possède la propriété commune d'être conjugués.

Deux diamètres sont dits conjugués lorsque chacun d'eux divise en deux les cordes parallèles à l'autre diamètre.

Les théorèmes connus de la géométrie plane permettent de démontrer aisément que les diamètres perpendiculaires du cercle sont en même temps conjugués.

Montrons qu'*aux diamètres conjugués du cercle correspondent les diamètres conjugués de l'ellipse.*

On trace une des cordes P_1Q_1 du cercle parallèles au diamètre E_1F_1 et on construit une corde PQ en affinité avec P_1Q_1 et parallèle au diamètre EF de l'ellipse. Le diamètre A_1B_1 divise en deux la corde perpendiculaire P_1Q_1 et donc la corde PQ doit être divisée en deux par le diamètre AB de l'ellipse. Cette proposition peut être étendue sur toutes les cordes parallèles au diamètre E_1F_1.

Le diamètre AB est donc le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles au diamètre EF. D'une manière analogue on peut démontrer que le diamètre EF divise à son tour en deux les cordes parallèles au diamètre AB.

On en déduit que les diamètres perpendiculaires du cercle sont en correspondance avec les diamètres conjugués de l'ellipse.

En géométrie projective on démontre que *pour toute transformation affine d'un plan il existe deux directions perpendiculaires, dites principales, telles qu'en se transformant elles deviennent de nouveau perpendiculaires.*

La détermination des directions principales est liée à la solution du problème suivant. Soient l'axe d'affinité O_1O_2 et les points affines C_1 et C (fig. 384). Il faut mener par le point C_1 deux droites perpendiculaires de façon que leurs droites affines soient également orthogonales. En d'autres termes, il faut construire un rectangle C_1MCN dont les angles aux sommets C_1 et C soient droits, et dont les deux autres sommets M et N reposent sur la droite O_1O_2.

On sait qu'à un rectangle dont la somme des angles opposés est de 180° on peut circonscrire un cercle. Les angles droits aux sommets C_1 et C reposent alors sur le diamètre commun MN. Le centre du cercle circonscrit se situe donc sur l'axe d'affinité.

La position de ce centre O est déterminée par l'intersection de l'axe d'affinité et de la perpendiculaire PO élevée à la droite C_1C en son milieu. En traçant ensuite une circonférence de rayon OC on trouve les points M et N où elle coupe l'axe d'affinité. En joignant M et N à C_1 on obtient les droites recherchées. En effet, les droites MC_1 et NC_1 sont perpendiculaires, car l'angle qu'elles forment repose sur le diamètre. Pour la même raison les droites MC et NC sont perpendiculaires elles aussi.

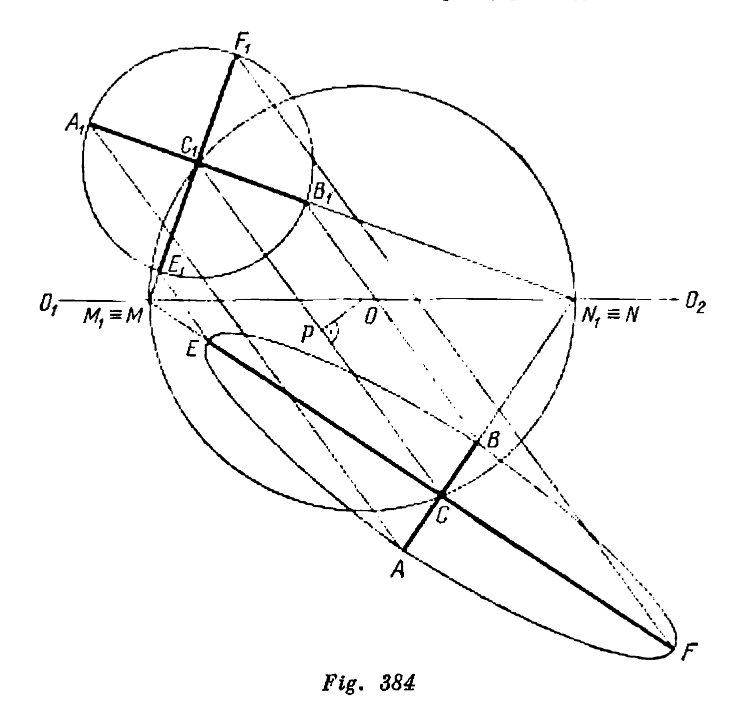


Fig. 384

Ainsi, *lorsque les diamètres conjugués du cercle se confondent avec les directions principales, les diamètres conjugués et orthogonaux de l'ellipse sont en correspondance avec eux.*

Ces diamètres de l'ellipse s'appellent axes. La construction des axes AB et EF d'une ellipse est donnée sur le même dessin 384.

Pour finir considérons la détermination des axes d'une ellipse à inscrire dans le parallélogramme donné $QRST$ (fig. 385).

On construit d'abord le carré $Q_1R_1S_1T_1$ en affinité avec le parallélogramme donné.

Pour simplifier le dessin, l'axe d'affinité O_1O_2 est confondu avec le côté ST. Après avoir tracé les diagonales du parallélogramme et du carré, on trouve les points affines C et C_1. Il reste à construire le cercle qui passe par ces points et dont le centre repose sur l'axe d'affinité O_1O_2, les constructions graphiques à réaliser ne différant en rien de celles relatives à la détermination des directions principales.

Le format de la figure 385 peut être quelque peu réduit si au lieu du carré, figure affine du parallélogramme donné, on prend le triangle TC_1S.

Le procédé qui vient d'être décrit est indiqué pour l'exécution de la perspective axonométrique du cercle.

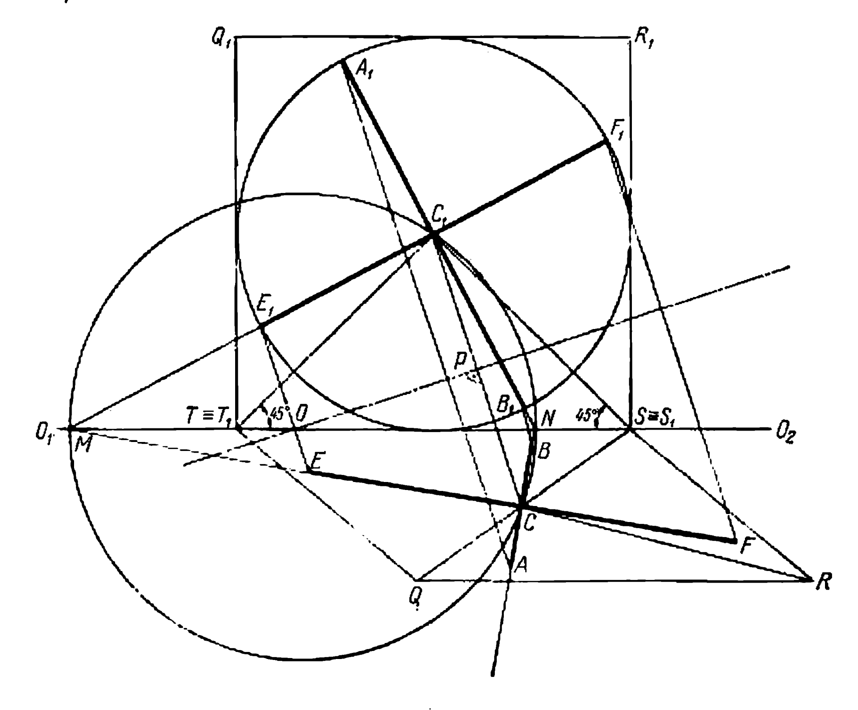


Fig. 385

Le présent chapitre n'a initié le lecteur qu'aux principes les plus généraux de la géométrie projective. Pour plus de détails sur les transformations géométriques il faut consulter des ouvrages appropriés.

PROJECTIONS COTÉES

§ 77. Généralités. Projections des points

La méthode des projections cotées est largement appliquée dans l'établissement des projets de voies ferrées et de routes, d'ouvrages hydrauliques, canaux, aérodromes, chantiers, c'est-à-dire lorsque la hauteur de l'objet représenté est relativement petite par rapport à sa longueur et sa largeur. Cette méthode s'emploie également

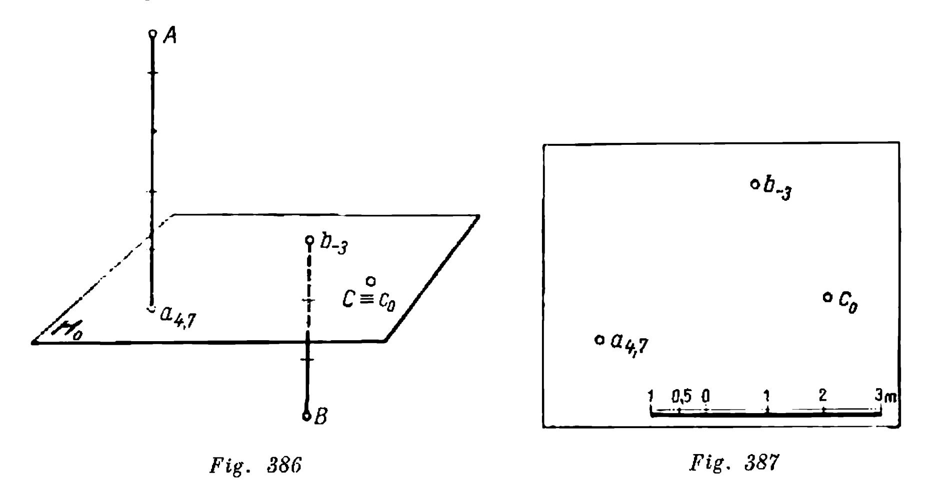


Fig. 386 *Fig. 387*

pour représenter une surface dont la génération n'obéit à aucune loi géométrique, celle du sol, par exemple.

La méthode consiste dans son principe à définir l'objet par la projection orthogonale sur le plan horizontal H_0 dit *plan de comparaison*. La correspondance univoque de l'image est alors obtenue en marquant à droite des projections des points les hauteurs ou cotes en mètres de ces points au-dessus du plan H_0. Lorsque le point se situe au-dessous du plan de comparaison, la cote est affectée du signe moins.

Une illustration suggestive de la construction des projections des points A, B, C est donnée par la figure 386. Les cotes marquées près des projections indiquent que le point A se trouve à 4,7 m au-dessus du plan H_0, le point B à 3 m au-dessous du plan H_0, et le point C est contenu dans le plan de comparaison.

La représentation de ces trois points en géométrie cotée est donnée sur la figure 387. Par convention, les dessins de ce type s'appellent *plans*. Les plans doivent être munis d'une échelle employée pour résoudre des problèmes métriques variés.

§ 78. Ligne droite

Introduisons les notions nécessaires pour comprendre ce qui suit.

On appelle *distance horizontale* la longueur de la projection horizontale d'un segment de droite. Composons le rapport de la distance verticale $h_B - h_A$ des points A et B du segment considéré à leur

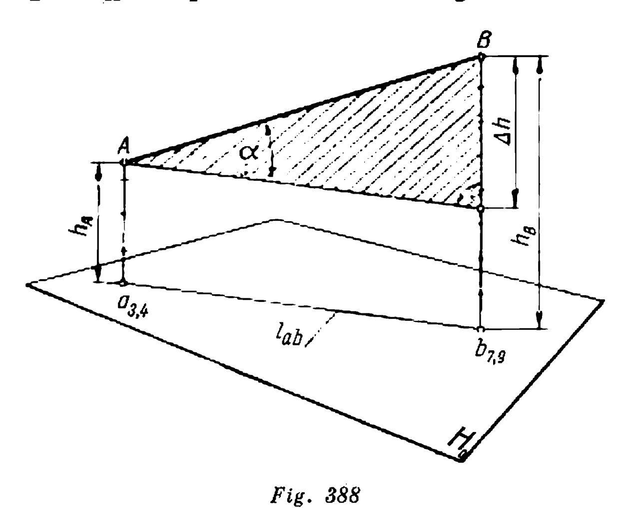


Fig. 388

distance horizontale l_{ab} (fig. 388) et désignons ce rapport par i; on a

$$i = \frac{h_B - h_A}{l_{ab}}.$$

La valeur $i = \operatorname{tg} \alpha$ est dite *pente* de la droite, et α, *inclinaison* de la droite sur le plan H_0.

Le rapport inverse $\frac{l_{ab}}{h_B - h_A}$, distance horizontale de deux points dont les cotes diffèrent de l'unité s'appelle *intervalle* de la droite, on le désigne par L. Ainsi, lorsque $h_B - h_A = 1$, $l_{ab} = L$.

De ces définitions on déduit immédiatement que la pente et l'intervalle d'une droite sont des grandeurs inverses qui s'écrivent donc $i = \frac{1}{L}$.

L'intervalle s'emploie pour effectuer la *graduation* d'une droite. Graduer une droite, c'est marquer sur sa projection les points dont les cotes sont exprimées en nombres entiers (cotes rondes).

Pour graduer la droite AB (fig. 389), il faut avant tout déterminer l'intervalle $L = \frac{l_{ab}}{h_B - h_A}$. Dans notre exemple, $l_{ab} = 12{,}2$ m, $h_B - h_A = 4{,}5$ m et $L = 2{,}7$ m.

On porte à partir du point $a_{3,4}$ jusqu'au point c_4 de cote ronde le plus proche le segment l_1 déterminé par le rapport

$$\frac{l_1}{L}=\frac{4-3,4}{l},$$

d'où l'on tire $l_1 = 0,6 \cdot 2,7 = 1,62$ *m*.

Les points suivants de cotes rondes 5, 6 et 7 sont distants l'un de l'autre de $L = 2,7$ m. Si en portant du point c_4 des intervalles

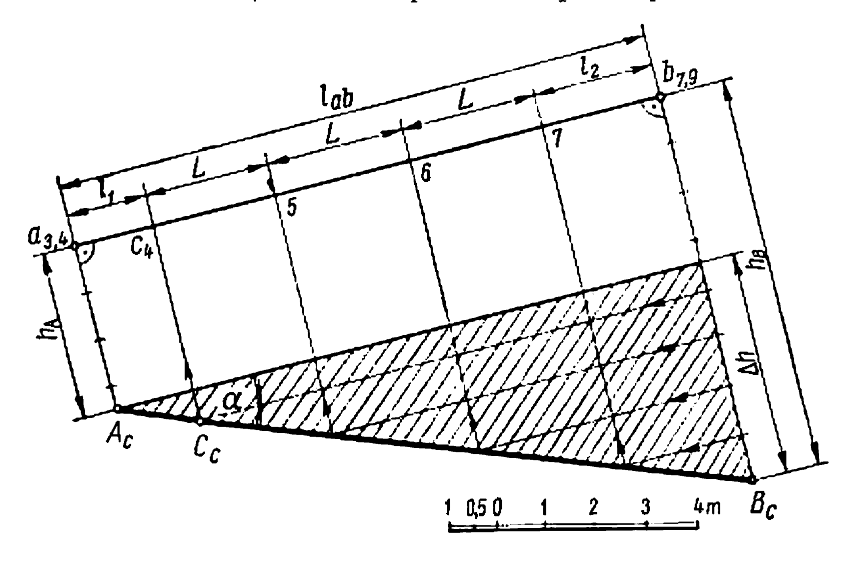


Fig. 389

L on prolonge la projection du segment à gauche du point $a_{3,4}$, on obtient les points de cotes 3, 2, 1 et enfin 0 qui est la trace horizontale de la droite.

Pour trouver la vraie longueur du segment AB on procède suivant la figure 389. A cet effet le trapèze $ABa_{3,4}b_{7,9}$ de la figure 388 est rabattu sur le plan du dessin. Les bases du trapèze sont constituées par les projetantes $Aa_{3,4}$ et $Bb_{7,9}$, et les côtés par le segment AB et sa projection $a_{3,4}b_{7,9}$, cette dernière étant prise comme charnière. Après rabattement, le trapèze prend la position $A_c a_{3,4} b_{7,9} B_c$. Les points A_c et B_c se trouvent alors sur les perpendiculaires à la charnière, le premier à la distance $h_A = 3,4$ m de la projection $a_{3,4}b_{7,9}$, et le deuxième à la distance $h_B = 7,9$ m. Les deux segments qui représentent les bases du trapèze sont construits à l'échelle du dessin. Pour simplifier le dessin, il est d'usage de dessiner non pas le trapèze, mais le triangle rectangle hachuré des figures 388 et 389. Les

côtés de ce triangle sont constitués par les projections du segment donné et par Δh (distance verticale du point B au-dessus de A). L'hypoténuse du triangle détermine la longueur cherchée du segment AB, alors que l'angle α entre A_cB_c et le côté horizontal est l'angle formé par le segment de la droite AB et le plan H_0 ; α est l'angle d'inclinaison de cette droite sur le plan H_0.

La même figure 389 montre comment à l'aide de deux faisceaux de droites parallèles marquées par des flèches on gradue le segment $a_{3,4}b_{7,9}$ par la méthode graphique.

§ 79. Position relative de deux droites

Soient les projections concourantes de deux droites AB et CD (fig. 390). Pour juger de la position relative de ces droites dans l'espace, on procède à leur graduation (voir § 78) et on compare les cotes des points d'intersection des projections. Si ces cotes sont les mêmes

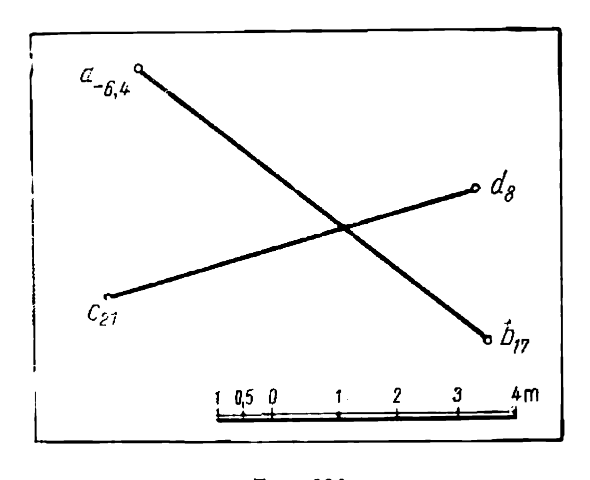


Fig. 390

pour les deux projections, les droites AB et CD sont concourantes puisqu'elles ont un point commun. S'il n'en est pas ainsi, les droites sont gauches.

Considérons deux droites parallèles AB et CD (fig. 391). Leurs projections sur un plan quelconque sont parallèles; cela concerne également leurs projections sur un plan V perpendiculaire au plan H_0 et parallèle aux droites données. Il en résulte que les angles formés par les projections $a'b'$ et $c'd'$ et les droites horizontales sont égaux, c'est-à-dire $\alpha_1' = \alpha_2'$. Or, comme $\alpha_1' = \alpha_1$ et $\alpha_2' = \alpha_2$, on en tire que $\alpha_1 = \alpha_2$. L'égalité des inclinaisons des droites parallèles au plan H_0

traduit l'égalité de leurs pentes et, par conséquent, de leurs intervalles. Ainsi, en géométrie cotée, *les projections des droites parallèles*

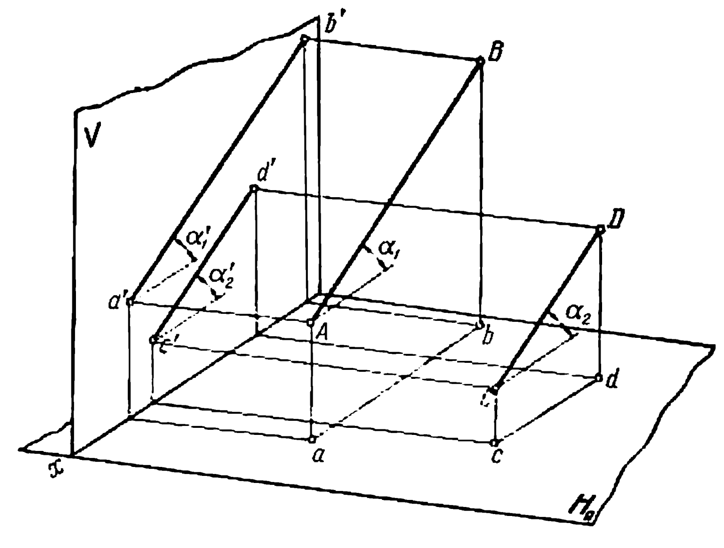


Fig. 391

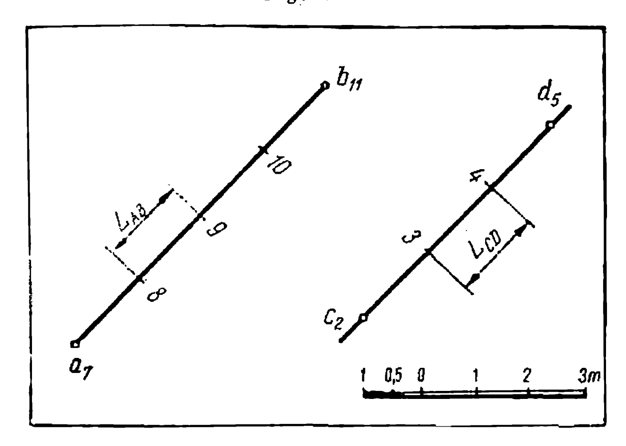


Fig. 392

sont parallèles, leurs intervalles sont égaux et leurs cotes changent dans le même sens (voir fig. 391).

La figure 392 donne les projections a_7b_{11} et c_2d_5 de deux droites parallèles AB et CD. Elles sont parallèles, leurs cotes augmentent dans le même sens et les intervalles L_{AB} et L_{CD} sont égaux.

§ 80. Plan

En plus des procédés connus (§ 15), en géométrie cotée un plan est déterminé par son *échelle de pente*. C'est le nom qu'on donne à la projection graduée de la ligne de plus grande pente.

La figure 393 représente l'image de l'espace d'un plan et de ses horizontales séparées par une distance verticale (équidistance) de 1 m. Les horizontales du plan et la ligne de plus grande pente qui leur est perpendiculaire sont projetées sur le plan H_0. La projection

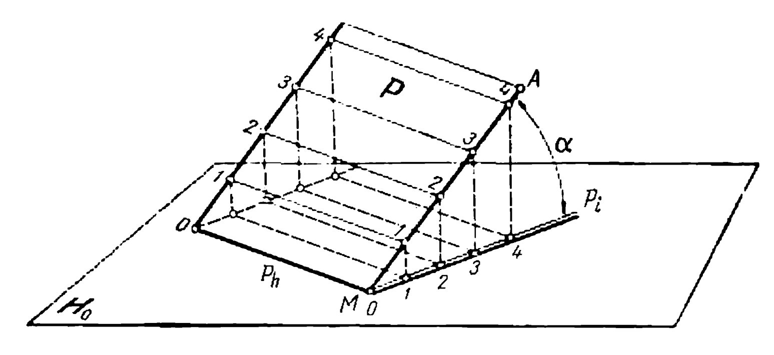


Fig. 393

de la ligne de plus grande pente est dégagée par un trait double (gros et fin) et désignée par P_i. C'est précisément l'échelle de pente du plan P. Les projections des horizontales et l'échelle de pente d'un plan se coupent sous un angle droit (voir § 14).

On appelle par convention inclinaison du plan P par rapport au plan H_0 l'angle α compris entre la ligne de plus grande pente AM et sa projection horizontale P_i.

§ 81. Position relative de deux plans

1. Plans concourants. L'intersection de deux plans P et R (fig. 394 et 395) s'obtient en joignant par une droite les points de rencontre de leurs horizontales de même cote. M marque ici le point d'intersection des horizontales de cote 4, et N celui des horizontales de cote 6. La droite recherchée est MN. Sur la figure 395 les deux plans sont donnés par les échelles de pente auxquelles on mène des horizontales perpendiculaires auxiliaires (de cotes 4 et 6).

On démontre aisément que lorsque les inclinaisons de deux plans sont les mêmes, la projection de leur ligne d'intersection est la bissectrice de l'angle formé par les projections des horizontales des plans considérés.

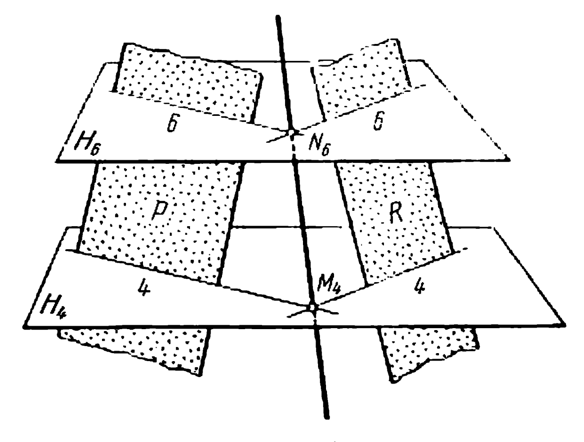


Fig. 394

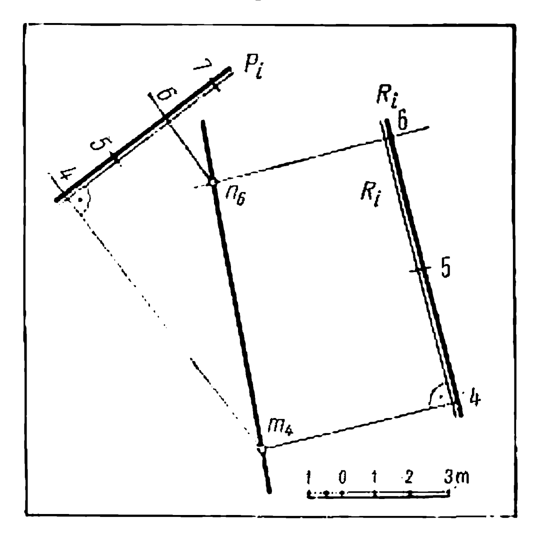


Fig. 395

La figure 396 montre la construction de la ligne d'intersection m_3n_2 de deux plans P et Q de mêmes inclinaisons. Les triangles rectangles $a_2m_3n_2$ et $b_2m_3n_2$ étant égaux (leurs côtés a_2m_3 et b_2m_3 étant égaux par définition et l'hypoténuse n_2m_3 étant commune), on en déduit que les angles au sommet n_2 sont égaux.

Il faut tenir compte de cette proposition lors de l'établissement des plans des toits des édifices lorsque les pentes forment avec le plan horizontal des angles α égaux (voir les exemples du § 87).

Considérons encore un cas particulier de l'intersection des plans P et R d'échelles de pente parallèles et d'intervalles inégaux (fig. 397).

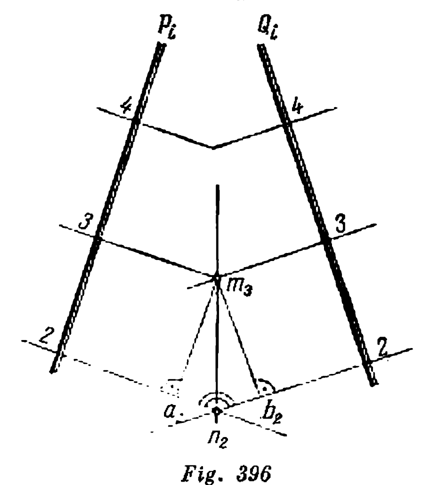


Fig. 396

La droite recherchée est dans ce cas une horizontale commune (voir le renvoi du § 20). Pour la construire il faut trouver un point commun aux plans donnés. Puisque les horizontales de même cote sont parallèles, il est impossible de trouver les points de l'intersection des deux plans, comme on l'a fait sur la figure 395. Pour résoudre le problème, on introduit un troisième plan auxiliaire S dont on trouve les lignes d'intersection avec le plan P (droite a_2b_3), et le plan R (droite c_3d_4). Le point $n_{4,2}$ d'intersection de a_2b_3 et de c_3d_4 est le point commun des deux plans donnés P et R. C'est le point par lequel passe la ligne d'intersection recherchée des plans P et R dégagée sur la figure 397 par un trait mixte ; les points de cette droite ont tous la cote 4,2.

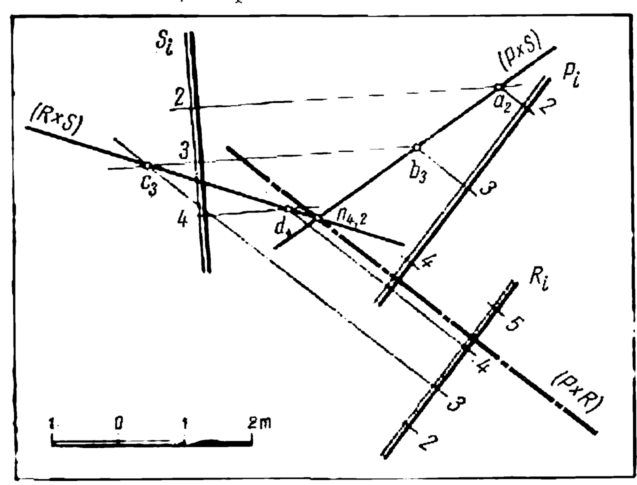


Fig. 397

2. Plans parallèles. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient parallèles est que leurs lignes de plus grande pente soient parallèles.*

En effet, les horizontales des plans donnés sont alors parallèles comme perpendiculaires aux droites parallèles. Ainsi la condition générale de parallélisme des plans se trouve vérifiée: l'un des plans contient deux droites concourantes parallèles à deux droites concourantes de l'autre plan.

Sur un dessin coté deux plans parallèles ont les échelles de pente parallèles, les intervalles égaux et les cotes augmentant dans le même sens (fig. 398).

§ 82. Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite appartient à un plan si deux points de la droite et deux points du plan ont les mêmes cotes. S'il n'en est pas ainsi, la droite perce le plan ou bien lui est parallèle. Comme pour les projections orthogonales, le problème de la position relative d'une droite

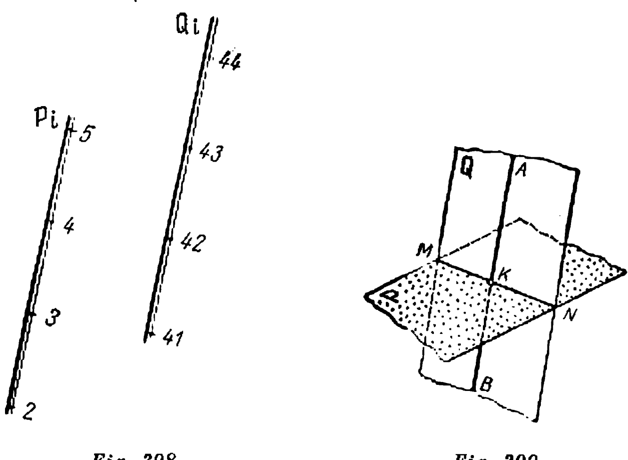


Fig. 398 *Fig. 399*

et d'un plan se ramène à celui de la position relative de deux droites, d'une droite donnée AB et d'une droite auxiliaire MN (fig. 399); cette dernière représente la ligne d'intersection d'un plan donné P et d'un plan auxiliaire Q mené par AB. Mais si dans le cas des projections orthogonales on prenait comme plan auxiliaire un plan projetant, en géométrie cotée on fait passer par la droite un plan quelconque. (Un plan projetant vertical ne peut pas convenir parce que sur le dessin les projections des droites AB et MN se confondent.)

Sur la figure 400, le plan auxiliaire est déterminé par la droite donnée AB et l'horizontale AC (a_5c_5), dont la direction est choisie de façon à obtenir dans les limites du dessin le point N (n_5) nécessaire

à la construction. Le deuxième point M (m_8) est déterminé par l'intersection des horizontales de cote 8.

Le point k de rencontre de ab avec mn est la projection du point d'intersection de la droite AB avec le plan P. La cote de ce point peut être déterminée en menant par ce point l'horizontale du plan P.

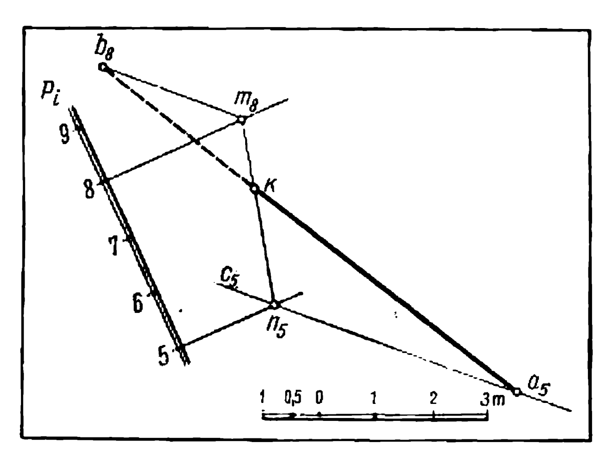


Fig. 400

Ainsi, pour trouver le point d'intersection d'une droite et d'un plan, il faut:

1) faire passer par la droite un plan quelconque;

2) construire la ligne d'intersection des plans donné et auxiliaire (droite MN);

3) déterminer le point recherché K comme le point d'intersection de la droite donnée AB et de la droite construite MN.

§ 83. Droite perpendiculaire à un plan

Théorème. *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, sa projection est parallèle à l'échelle de pente de ce plan et l'intervalle de la droite est inverse de l'intervalle du plan.*

Pour démontrer le théorème adressons-nous à la figure 401 qui représente un plan P avec ses horizontales tracées, l'échelle de pente P_i et une droite AB perpendiculaire au plan P.

1. On sait de l'étude des projections orthogonales que la projection horizontale d'une perpendiculaire à un plan fait un angle droit avec les projections de même indice des horizontales de ce plan, c'est-à-dire $a_{n+1}b_n \perp nn$, et puisque également $P_i \perp nn$, on a $a_{n+1}b_n \parallel P_i$.

2. Considérons un triangle rectangle $A_{n+1}B_nC_{n+1}$, dont la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est égale à 1 m. Les côtés du triangle sont les segments de la perpendiculaire et de

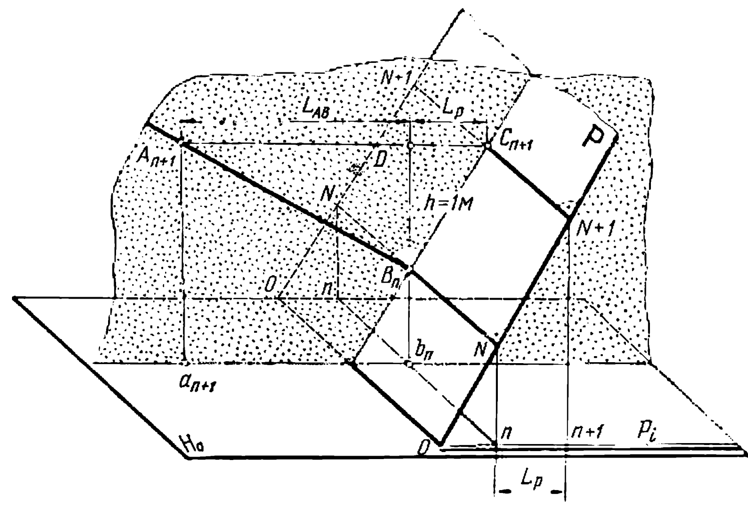


Fig. 401

la ligne de plus grande pente du plan, de plus la différence des cotes des *extrémités* de chaque côté est égale à l'unité. Dans ce triangle rectangle

$$\frac{L_{AB}}{h} = \frac{h}{L_p}.$$

Puisque $h = 1$, on a

$$L_{AB} = \frac{1}{L_p}.$$

La figure 401 montre que L_{AB} est l'intervalle de la perpendiculaire au plan P, et L_p l'intervalle de l'échelle de pente du plan.

Il est à noter que la graduation de la projection $a_{n+1}b_n$ et celle de l'échelle de pente P_i doivent augmenter en sens contraire.

L'application de ce théorème de la perpendiculaire à un plan peut être illustrée par l'exemple suivant.

E x e m p l e. *Déterminer la distance d'un point A à un plan P donné par l'échelle de pente* (fig. 402).

Abaisser du point A une perpendiculaire sur le plan P et trouver le point K de rencontre de cette perpendiculaire avec le plan P, puis la vraie grandeur du segment de la droite AK.

•

Pour construire la perpendiculaire abaissée du point A au plan P, on mène par a_9 une droite parallèle à l'échelle de pente P_i (voir § 79). Après avoir trouvé l'intervalle de la perpendiculaire L_n, on gradue la projection de la perpendiculaire, en retenant que sa graduation doit augmenter en sens inverse à celui de l'échelle de pente.

On fait passer par la perpendiculaire un plan auxiliaire (voir les horizontales 6 et 5) et on trouve la droite c_5b_6 d'intersection du plan P et du plan auxiliaire,

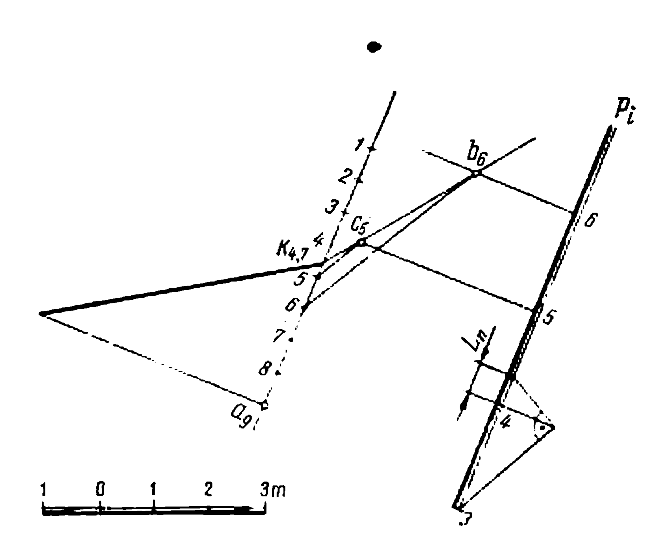


Fig. 402

puis le point $k_{4,7}$ de rencontre de la perpendiculaire avec la droite obtenue. Le segment $k_{4,7}a_9$ est précisément la projection du segment qui détermine la distance du point A au plan P; la grandeur de cette distance s'établit de la manière indiquée au § 78.

§ 84. Projections des corps et des surfaces

En géométrie cotée la représentation des corps impose l'indication sur la projection horizontale du corps donné des cotes des points et des lignes figuratifs (si toute la ligne a la même cote). Dans un polyèdre, les points figuratifs sont les sommets.

La figure 403 montre une pyramide en projections cotées dont la base se situe dans le plan H_0 et son sommet se trouve à 5 m de ce

plan. La figure 404 représente un prisme triangulaire dont la base inférieure se trouve dans le plan H_2 et la base supérieure dans un plan de cote 5.

Mais lorsqu'un corps est limité par une surface courbe, sa représentation en projections cotées implique l'usage des lignes ou courbes

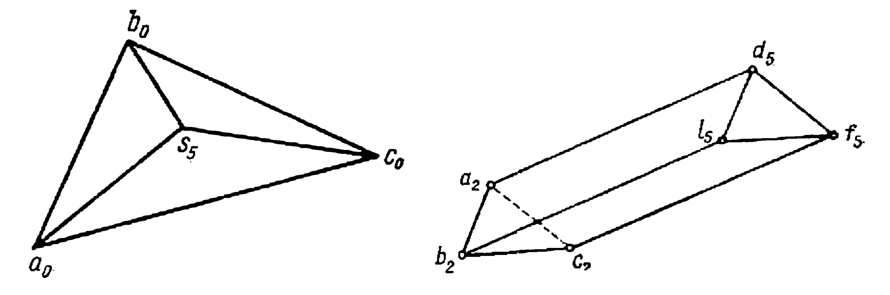


Fig. 403 *Fig. 404*

de niveau qui constituent dans ce cas des lignes d'intersection de la surface du corps donné par des plans parallèles au plan H_0.

Ainsi, les figures 405 et 406 représentent un cône et un cylindre obliques qui ont pour courbes de niveau des cercles dont les centres

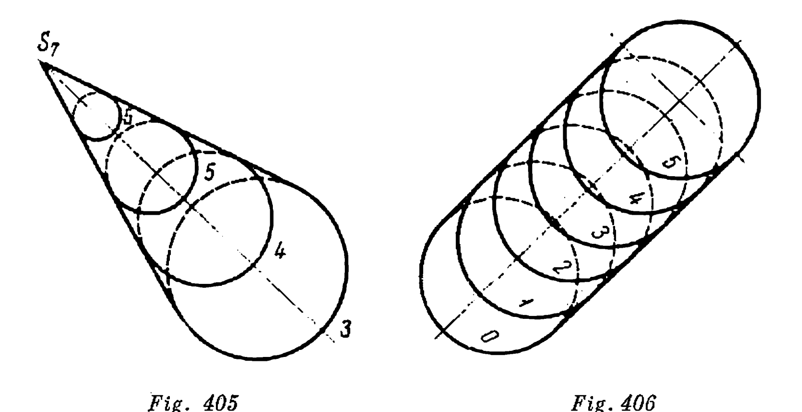


Fig. 405 *Fig. 406*

reposent sur l'axe. Dans certains cas le tracé des lignes de niveau d'une surface impose des constructions spéciales. L'exemple peut en être fourni par le tracé des lignes de niveau d'une surface d'égale pente qui constitue une enveloppe de la famille des cônes circulaires droits dont les sommets composent une certaine courbe gauche AB (fig. 407). L'enveloppe d'une telle famille de cônes est une surface réglée dont toutes les génératrices rectilignes forment avec le plan H_0 le même angle égal à l'inclinaison des génératrices du cône sur H_0.

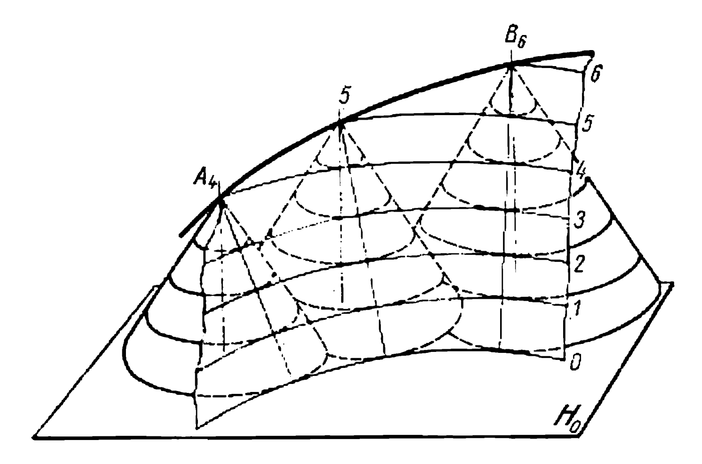


Fig. 407

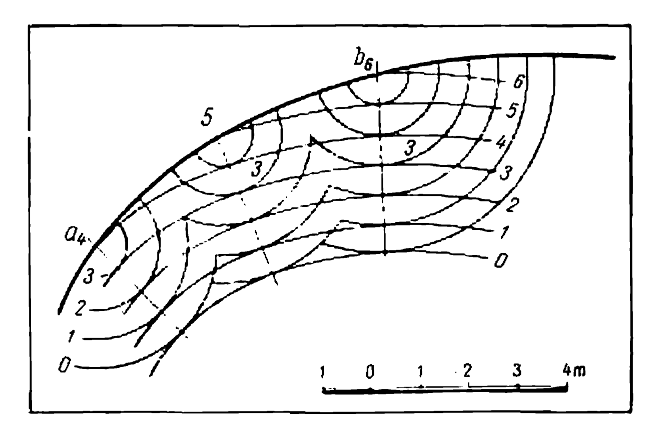


Fig. 408

La figure 408 montre la construction des lignes de niveau d'une surface d'égale pente en projections cotées. Chacune d'elles est ici une enveloppe de la famille des lignes de niveau de cônes, et toutes les lignes de niveau de la famille donnée ont de plus la même cote. Ainsi sur la figure 408, la ligne de niveau de la surface de cote 3 enveloppe une famille de lignes de niveau de cônes de même cote 3.

Un cas particulier de surface d'égale pente est l'hélicoïde développable (voir § 42).

Un exemple d'application est donné dans ce qui suit avec de nombreux détails (construction du talus d'une plate-forme de voie ferrée en courbes et en pentes).

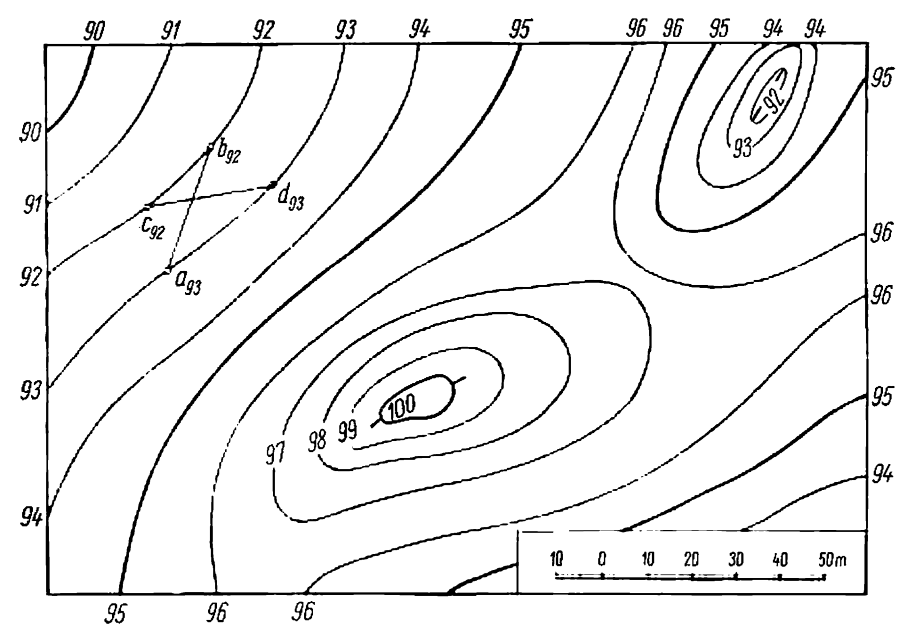


Fig. 409

En guise de conclusion considérons la représentation de la surface du sol à l'aide des lignes de niveau. La surface du sol peut servir d'exemple d'une surface topographique dont la génération ne vérifie aucune loi géométrique.

La distance entre les plans horizontaux qui coupent la surface topographique est prise égale à un ou quelques mètres. Suivant les cotes des lignes de niveau on peut juger de la forme de la surface représentée sur le plan (carte). Ainsi le centre de la carte (fig. 409) révèle une élévation (la cote de la ligne de niveau supérieure est 100), et en haut dans le coin droit, une dépression (la cote de la ligne de niveau inférieure est 92). Pour représenter la surface du sol on utilise, en plus des cotes, des traits qui indiquent la direction de pente de la surface. Dans le cas d'une élévation les traits sont marqués sur l'une des horizontales supérieures dans le sens de l'écoulement de l'eau. Dans le cas d'une dépression, les extrémités des traits sont dirigées à l'intérieur de la ligne de niveau inférieure.

Pour résoudre divers problèmes ayant trait à une surface topographique, on admet qu'une droite (AB ou CD, par exemple, de la fig. 409) qui joint deux points de lignes de niveau voisines est située par tous ses points à la surface. Plus la différence des cotes des lignes de niveau est faible, plus l'erreur ainsi commise est petite.

De toutes les droites joignant le point donné A de la surface aux points de la ligne de niveau voisine, celle dont la distance horizontale est minimale a la plus grande pente. La figure 410 montre la construction de la ligne de plus grande pente menée par le point A d'une surface topographique. Pour la réaliser, on trace du point A comme

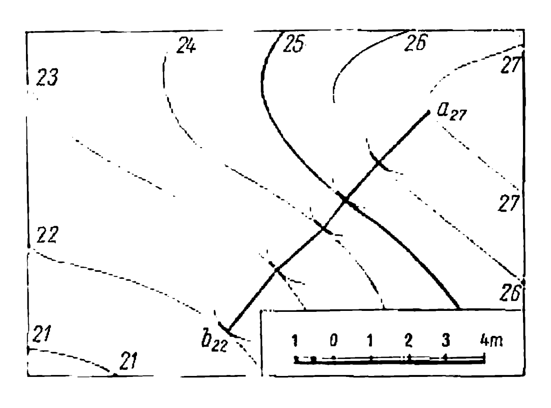


Fig. 410

d'un centre un arc de circonférence tangent à la plus proche ligne de niveau (26) ; puis, du point de contact, on trace un deuxième arc tangent à la ligne de niveau suivante (25), etc. En joignant ainsi les points de contact, on obtient la ligne recherchée.

§ 85. Intersection des surfaces

Puisque toute surface (y compris une surface plane) est matérialisée par une famille de lignes de niveau, la ligne d'intersection des surfaces peut être construite comme le lieu géométrique des points d'intersection des lignes de niveau de mêmes cotes. L'exemple le plus simple qui rend clair cet énoncé est la construction de la ligne d'intersection de deux plans examinée au § 81.

Dans ce qui suit nous examinerons des cas plus compliqués d'intersection de surfaces.

Exemple 1. *Construire l'intersection du talus d'une plate-forme de voie ferrée avec un coteau plan.*

1. Soit l'axe de la plate-forme rectiligne et horizontal (fig. 411). La plate-forme de la voie dans ce cas représente un prisme dont les bases sont les sections transversales normales (profils) du remblai $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 411,*a*). Les faces inclinées P_1 et P_2 du prisme forment avec le plan H_0 un angle α dont la tangente définie par le cahier des charges est égale par exemple à 1 : 1,5.

Donc l'intervalle de l'échelle de pente des plans P_1 et P_2 qui sont les faces du talus est de 1,5 m. Dans ce cas les arêtes étant horizontales, on construit lee

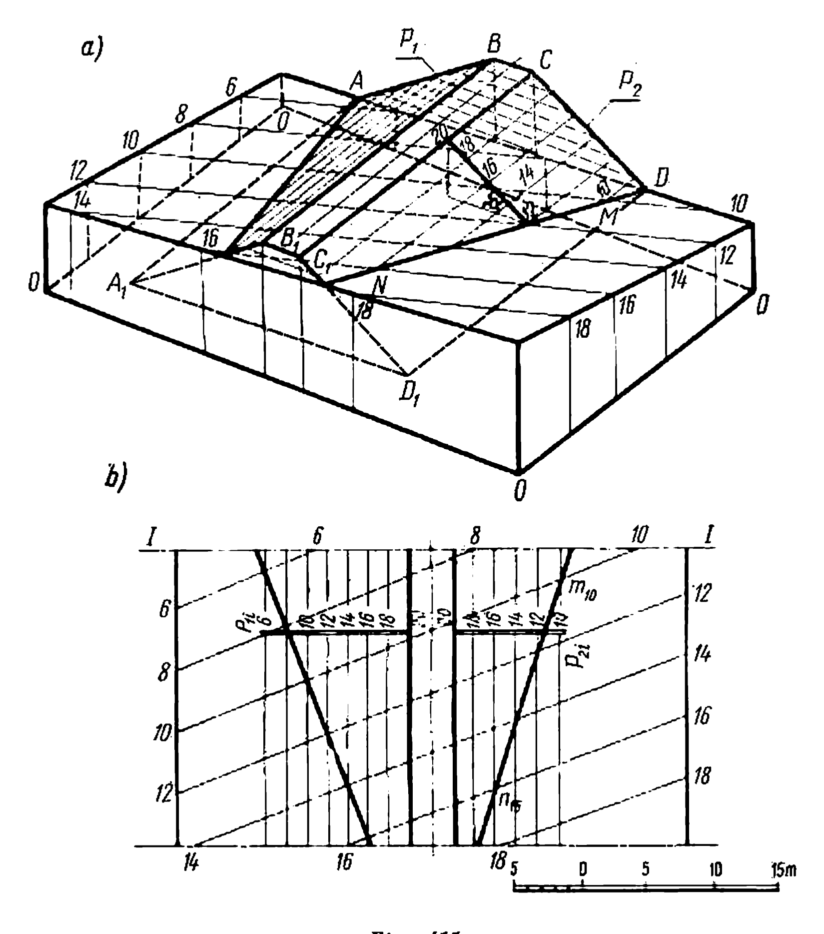


Fig. 411

échelles de pente P_{1i} et P_{2i}, puis les lignes de niveau (fig. 411,*b*) des talus de remblai et on détermine les points d'intersection des lignes de niveau de même cote des talus et du coteau plan (il suffit de déterminer ici deux points, M et N par exemple, car la ligne d'intersection est une droite). Les droites trouvées constituent les limites qui marquent le début du remblai.

2. Considérons le cas où la plate-forme de la voie est rectiligne mais non horizontale. Soient : la pente de la plate-forme $I=\frac{1}{22}$; la pente des talus de remblai ou de déblai $i = 1:1{,}5$; la cote de l'axe de la voie en A (fig. 412) est de 47 m. Pour établir les limites des travaux de terrassement, il faut construire les lignes de niveau du remblai et du déblai. La construction de ces lignes est liée à la solution du problème suivant (fig. 413,*a*) : faire passer par une droite donnée AB un plan P de pente égale à i. La solution se ramène à la construction d'un plan

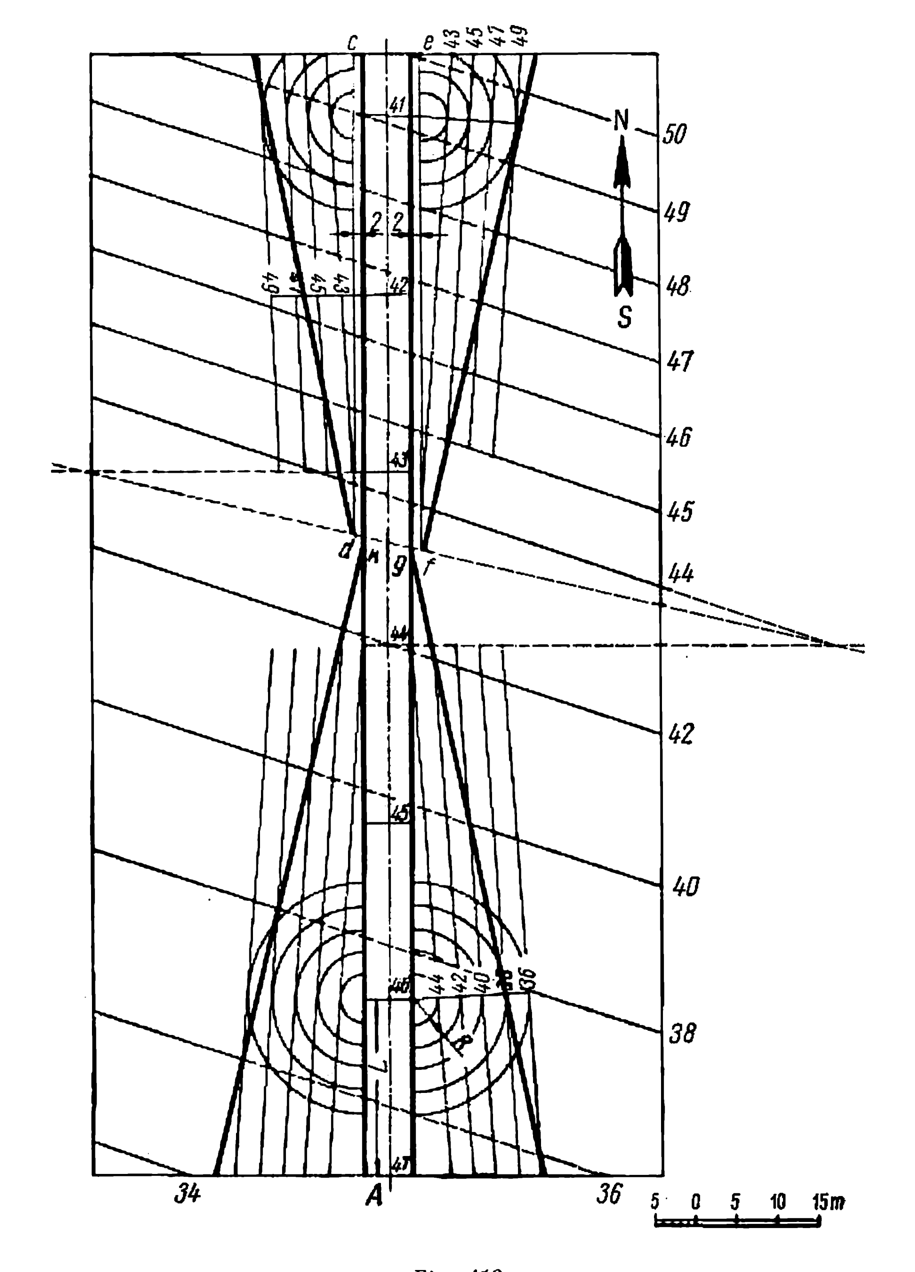

c
e
43
45
47
49
41
N
50
49
48
47
46
45
44
42
40
38
S
2
2
49
47
45
43
42
43
d
k
g
f
44
45
46
44
42
40
38
36
R
47
34
A
36
5
0
5
10
15m

Fig. 412

tangent à un cône dont le sommet se trouve en un des points de la droite donnée, alors que la pente i des génératrices du cône est imposée: $i = \frac{h}{R}$.

Pour une hauteur du cône $h = 1$ m, le rayon de base $R = \frac{1}{i}$.

La tangente à la base du cône en B où la droite donnée perce le plan de base est une horizontale du plan cherché (la figure 413,*a* montre un des deux plans pouvant satisfaire aux conditions du problème). La ligne de contact (génératrice

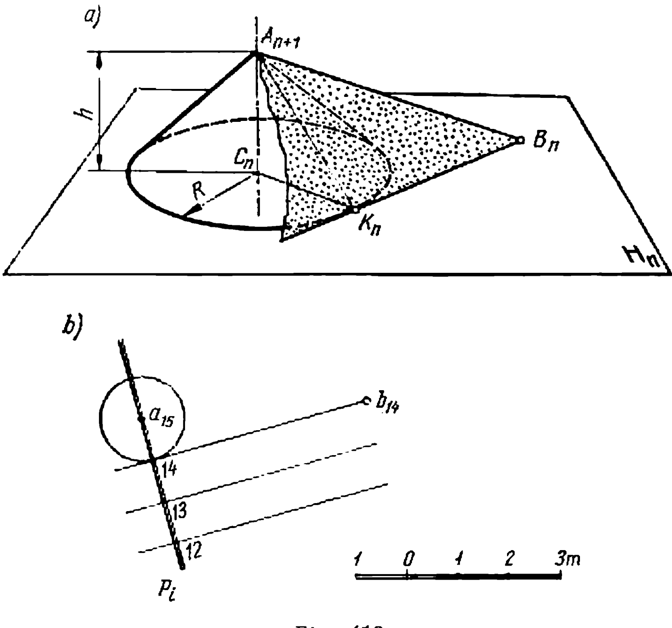


Fig. 413

AK) est la ligne de plus grande pente du plan construit, et sa projection graduée constitue l'échelle de pente. La figure 413,*b* donne la solution du même problème en projections cotées.

Revenons à la figure 412 sur laquelle la solution décrite est appliquée 4 fois. Les droites par lesquelles passent les plans de pente donnée (deux plans latéraux du remblai et deux du déblai) sont constituées ici par les arêtes du remblai et les droites CD et EF; ces dernières reposent dans le plan de la plate-forme mais pour le déblai, elles sont déportées de 2 m par rapport aux arêtes. L'élargissement de la plate-forme de 2 m de chaque côté de l'axe dans la zone du déblai est défini par l'exécution des agoges. Les cotes sur chaque arête s'obtiennent à l'aide des lignes de niveau de la plate-forme; ces dernières sont menées perpendiculairement à l'axe de celle-ci par les points établis en graduant l'axe.

La comparaison des cotes des lignes de niveau du sol et de la plate-forme montre qu'il faut établir un remblai du côté Sud du terrain et un déblai du côté Nord.

Pour construire les lignes de niveau du talus Est du remblai, on a pris sur l'arête deux points de cotes 44 et 46. (Il faut porter l'attention sur le fait que dans

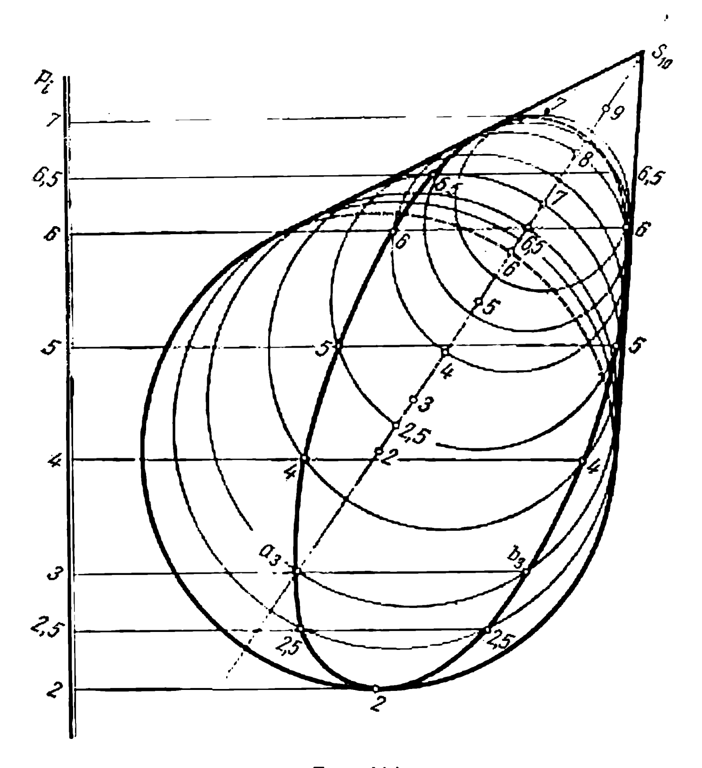


Fig. 414

ce cas les arêtes *ne sont pas* des droites horizontales comme dans le cas de la figure 411.) On place au deuxième des points choisis le sommet du cône auxiliaire. Pour une hauteur de cône de 2 mètres (46—44), le rayon R de base doit être égal à 3 m $\left(R = \frac{h}{i}\right)$. La base du cône se trouve dans le même plan horizontal que le point de cote 44 pris sur l'arête.

La tangente à la base du cône auxiliaire tracée à partir du point de cote 44 est la ligne de niveau 44 du talus Est du remblai. A la distance de 3 m l'un de l'autre on mène en remblai parallèlement à la ligne 44 les lignes de niveau paires du talus de remblai. Il est clair qu'elles sont tangentes aux lignes de niveau correspondantes de la surface conique (si on la prolonge vers le bas). L'échelle de pente du plan de talus est perpendiculaire aux lignes de niveau du talus, mais non pas à l'arête de la plate-forme. La limite du talus du côté Est s'établit comme l'intersection de deux plans, la surface latérale du talus et la surface inclinée du coteau.

Les limites du talus de déblai s'établissent de la même façon, seulement le sommet du cône auxiliaire est orienté vers le bas et placé en un point dont la cote est plus petite que celle qui servira à tracer la tangente à la base du cône.

Les points K et G des arêtes de la plate-forme, ainsi que les points D et F du contour de la plate-forme élargie des deux côtés de l'axe appartiennent à

une droite. La droite DF matérialise l'intersection du plan de la plate-forme avec le coteau plan ; la droite qui détermine la ligne de passage du remblai au déblai s'appelle ligne de séparation entre la partie en remblai et la partie en déblai.

Exemple 2. *Construire la section d'un cône oblique par un plan P donné par l'échelle de pente.*

La base du cône est cotée 2 et le sommet, 10 (fig. 414).

La ligne cherchée est le lieu géométrique des points d'intersection des lignes de niveau du cône (circonférences) et du plan (droites). Ainsi, par exemple, les points A et B s'obtiennent par l'intersection des lignes de niveau de même cote 3.

§ 86. Intersection d'une droite et d'une surface

L'intersection d'une droite et d'un plan a été étudiée au § 82.

Trouver l'intersection d'une droite avec un corps géométrique consiste à trouver quelques points d'intersection (le plus souvent deux).

1. Intersection d'une droite MN et d'un prisme. On fait passer par la droite donnée (fig. 415) un plan sécant simple auxiliaire

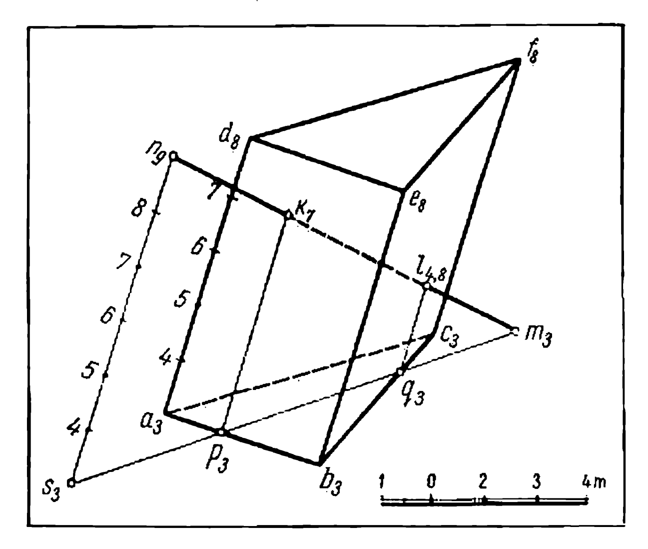


Fig. 415

(voir § 36) déterminé par les droites MN et NS ; la droite NS est tracée parallèlement aux arêtes latérales du prisme (voir § 79). Le plan sécant simple coupe la base du prisme (située dans le plan H_3) suivant la droite MS, et ses faces latérales suivant deux droites PK et QL parallèles aux arêtes latérales. Ces deux dernières droites coupent la droite considérée MN en K (k_7) et en L ($l_{4,8}$) qui sont les points recherchés.

Les points d'intersection d'une droite et d'une surface cylindrique se trouvent d'une manière analogue.

2. Intersection d'une droite ***MN*** **et d'une pyramide.** On mène par la droite donnée (fig. 416) un plan sécant simple auxiliaire déterminé par deux droites concourantes MN et MS (la droite MS est tracée par le sommet de la pyramide). Ce plan auxiliaire coupe la base de la pyramide (située dans le plan H_2) suivant la droite PN parallèle à l'horizontale MS, et les faces latérales suivant deux droites PS et QS. Les points K et L d'intersection des droites PS et QS avec la droite considérée MN sont les points d'intersection de la droite donnée et de la surface de la pyramide.

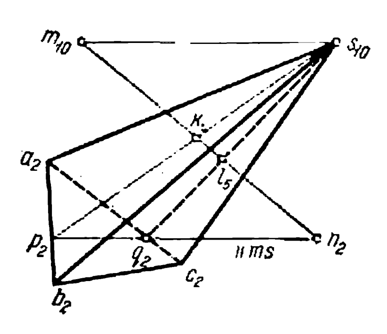


Fig. 416

L'intersection d'une droite et d'un cône s'établit de la même façon.

3. Intersection d'une droite et d'une surface topographique. Dans ce cas également (fig. 417) après avoir gradué la droite donnée AB, on mène par celle-ci un plan auxiliaire.

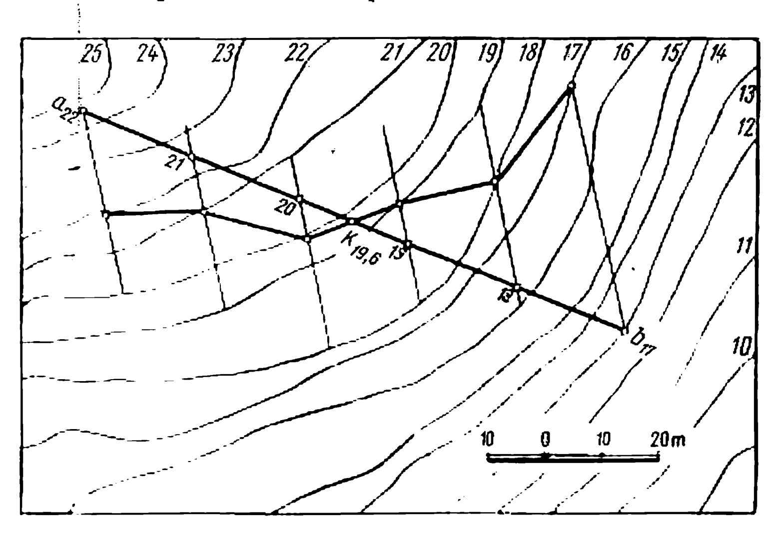


Fig. 417

On détermine ensuite les points d'intersection des lignes de niveau de même indice du plan et de la surface topographique. Le

lieu géométrique des points trouvés constitue la ligne d'intersection du plan et de la surface. Le point K de rencontre de la droite considérée AB avec la ligne de section trouvée est le point commun de la droite donnée et de la surface topographique.

§ 87. Exemples tirés de la pratique

E x e m p l e 1. *Déterminer les limites du remblai et du déblai d'un chantier.*
Soit à déterminer les limites des travaux de terrassement pour l'établissement du chantier horizontal de cote 51 m dont le contour est représenté sur la figure 418.

La pente des talus de déblai est $i_1 = 1:1$ et de remblai $i_2 = 1:1{,}5$. La rampe rectiligne du chantier a une pente $I = 1:4$.

La ligne de séparation passe par l'horizontale 51. La partie Nord du chantier se situe en déblai, et la partie Sud en remblai. On élargit le chantier dans la zone du déblai sur tout le pourtour pour aménager des agoges. Les limites cherchées des travaux de terrassement sont définies par les lignes d'intersection de la surface topographique et des talus de remblai et de déblai. Pour les déterminer on construit les lignes de niveau de tous les talus. L'intervalle entre les lignes de niveau du déblai est de 1 m $\left(L_1 = \frac{1}{i_1}\right)$, et du remblai 1,5 m $\left(L_2 = \frac{1}{i_2}\right)$. En négligeant d'abord la surface demi-circulaire et la rampe, on construit les lignes de niveau de trois talus de remblai et de trois talus de déblai. Les lignes de niveau des talus plans sont des droites parallèles aux côtés correspondants du chantier.

La surface de déblai demi-circulaire du Nord est conique à lignes de niveau en forme d'arcs de cercle concentriques.

Les lignes de niveau des talus plans de la rampe s'établissent compte tenu de leur passage par les arêtes inclinées (voir § 85, fig. 413).

Chaque surface de talus de déblai et de remblai est ainsi figurée par ses lignes ee niveau. Il reste à construire les lignes d'intersection de ces surfaces entre elles dt avec le sol. Les lignes recherchées sont déterminées par les points d'intersection des lignes de niveau de mêmes cotes.

E x e m p l e 2. *Déterminer les limites du remblai et du déblai d'un secteur de la plate-forme de voie ferrée en courbe montante.*

Sur une carte les lignes de niveau (fig. 419) déterminent l'axe de la plateforme d'une voie ferrée et la cote du point A (a_{26}) qui appartient à l'axe. La plateforme de la voie entre les points A et B monte selon une pente I ‰. On connaît les profils transversaux normaux du remblai et du déblai.

Déterminer les limites des travaux de terrassement nécessaires pour l'établissement de la plate-forme de la voie. Voici l'ordre recommandé pour résoudre ce problème.

1. Après avoir défini l'intervalle L $\left(L = \frac{1}{I}\right)$, graduer l'axe de la voie et tracer les lignes de niveau de la plate-forme. Pour graduer la courbe, reporter avec le compas $1/n^e$ partie de l'intervalle n fois le long de l'axe à partir du point A et obtenir ainsi sur l'axe le point de cote 27. Poursuivant cette opération trouver les points d'autres cotes de l'axe. Dans les cas courants il est d'usage de prendre $n = 2$ à 4. Quant aux lignes de niveau de la plate-forme, ce sont des droites dont les projections horizontales se coupent en un point qui est le centre de l'axe de la voie. La surface de la plate-forme en courbe montante, comme nous l'avons montré au § 43, est un hélicoïde droit (cas particulier d'un conoïde).
2. Comparer les cotes de l'axe et de la surface topographique et établir les terrains en déblai et en remblai.

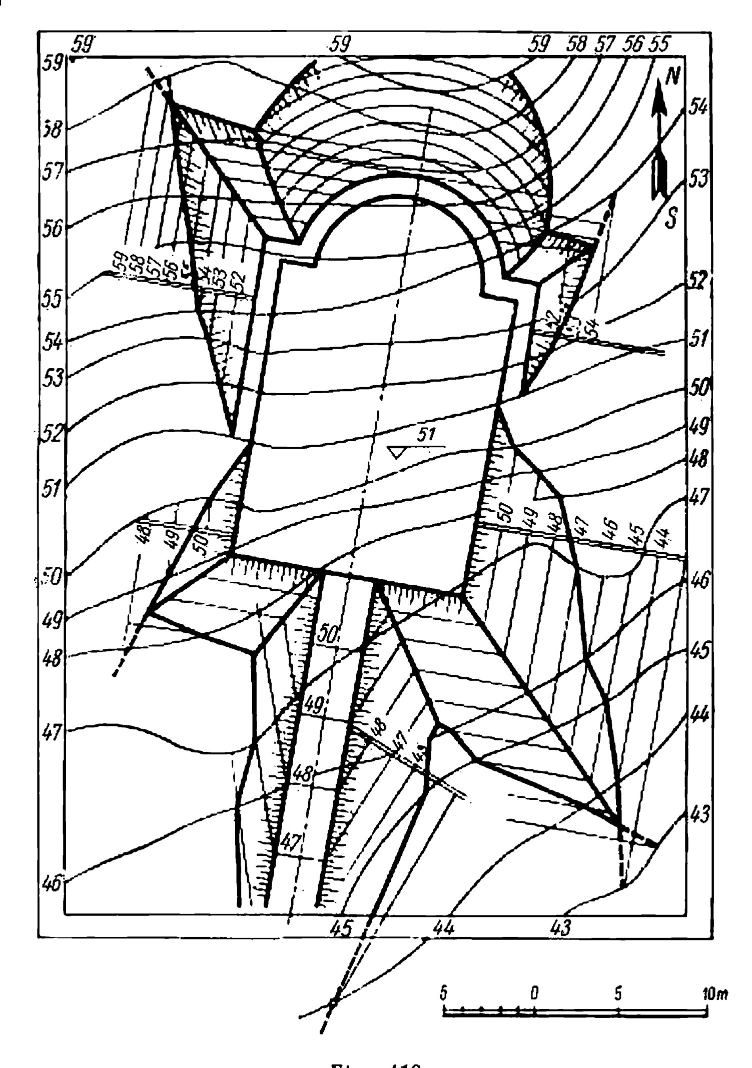


Fig. 418

A l'emplacement du déblai la surface de la plate-forme est élargie de 2 m des deux côtés de l'axe pour y aménager des agoges. Tracer à cet effet les lignes *CD* et *EF* dont les projections sont concentriques aux arêtes de la plate-forme [1].

3. Construire les lignes de niveau de la famille des cônes circulaires droits dont les sommets reposent sur les arêtes de la plate-forme de la voie ferrée dans

[1] Le tracé de ces lignes est conventionnel, car il n'y a pas de lignes qui leur correspondent sur le talus de déblai.



Fig. 419

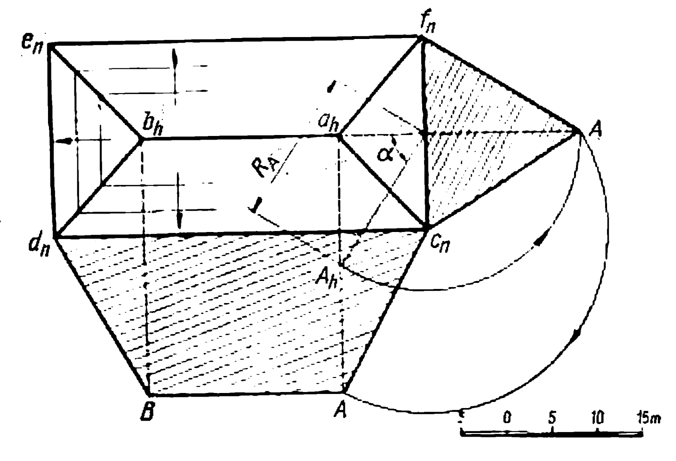


Fig. 420

le cas de remblai et sur les lignes CD et EF dans celui de déblai. Le sommet d'un des cônes auxiliaires se trouve au point de cote 28 qui appartient à l'arête extérieure. Le rayon du premier cercle de la section du cône est égal à l'intervalle du talus, c'est-à-dire à 1,5 m; la cote de ce cercle est 27 m. Le rayon de chaque cercle suivant augmente de la grandeur d'un intervalle, alors que sa cote diminue de l'unité.

Construire de la même façon les lignes de niveau du cône dont le sommet se trouve sur l'arête extérieure au point de cote 27. Les lignes de niveau de la famille des cônes du talus de remblai adjacent à l'arête intérieure ne sont pas représentées sur la figure 419.

En passant au déblai, les sommets des cônes auxiliaires sont dirigés vers le bas. Les cotes des lignes de niveau de chaque cône augmentent avec le rayon du cercle. La figure 419 montre la construction des lignes de niveau de deux cônes auxiliaires dont les sommets se situent sur la ligne CD aux points cotés 26 et 27 m.

4. Tracer les lignes de niveau des talus de remblai et de déblai. Chacune d'elles est une enveloppe de la famille des cercles de même cote.

5. Déterminer les limites des travaux de terrassement. Chacune des limites construites est le lieu géométrique des points d'intersection des lignes de niveau de même cote du talus et du sol.

Il convient d'étudier spécialement la construction des points qui déterminent la ligne de séparation. Les points K et M de cette ligne qui reposent sur les arêtes s'obtiennent par l'intersection des arêtes avec les limites des talus de remblais. A cet effet il faut aux points d'intersection des lignes de niveau du sol et de la surface du remblai situés en dehors de la plate-forme ajouter un point N (n_{28}) dont la projection se trouve de l'autre côté de l'arête. La construction du point N impose à son tour de mener une ligne de niveau auxiliaire du talus de remblai de cote 28.

Pour trouver les points C et E d'intersection des limites du déblai et du contour de la plate-forme élargie de la voie, procéder d'une manière analogue.

E x e m p l e 3. *Construire les plans des toits d'édifices, dont les pentes forment des angles égaux avec le plan horizontal.*

Les lignes d'intersection des pentes sont ici des bissectrices des angles composés par les lignes de niveau des pentes qui se coupent (voir § 81).

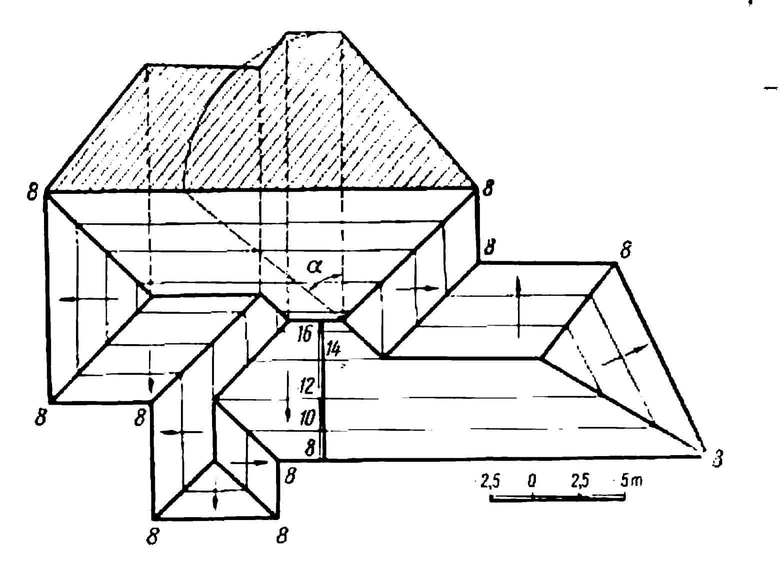


Fig. 421

La figure 420 présente le plan d'un toit à quatre pentes dont les lignes de niveau forment les corniches *CD*, *DE*, *EF* et *FC*. Celles-ci se situent toutes dans le même plan horizontal et ont la même cote *n*. Les bissectrices des angles droits constituent les lignes d'intersection des pentes respectives. Le faîte du toit est formé par la droite *AB*.

Sur le même dessin deux pentes sont rabattues sur le plan des corniches. Pour rabattre la pente *ACF*, il faut déterminer le rayon de rotation du point *A*. Ce rayon est une hypoténuse dont la construction est possible lorsque l'angle α ou la différence des cotes $(h - n)$ sont connus.

En rabattant la deuxième pente on mène les droites a_hA et b_hB perpendiculaires à la charnière qui est ici la corniche *CD*, et on coupe la première d'entre elles par un arc de rayon c_nA tracé du point c_n pris comme centre.

L'exemple de construction d'un toit de configuration plus compliquée est donné par la figure 421. Le principe de la détermination des lignes d'intersection des pentes est le même que dans le cas précédent. Pour rabattre une des pentes du toit sur le plan horizontal, il faut connaître l'angle α ou l'échelle d'une pente quelconque.

Exercices

1. On donne la projection d'un segment de droite *AB* (fig. 422). Déterminer la vraie longueur du segment et l'angle α, le point de cote zéro.

2. Etablir la position relative de deux droites *AB* et *CD* déterminées par leurs projections (fig. 423).

3. Mener par le point donné *A* (fig. 424) le plan *P* dont l'inclinaison $\alpha = 30°$, et l'angle de direction $\varphi = 45°$.

4. Dans le plan *R* donné par son échelle de pente (fig. 425) mener par le point *A* les droites de pentes suivantes: $i_1 = 1:2$; $i_2 = 1:3$; $i_3 = 2:1$.
Quelle valeur de *i* satisfait au problème?

5. Mener par le point *A* une droite qui coupe la droite donnée *BC* et soit parallèle au plan *P* donné par son échelle de pente (fig. 426).

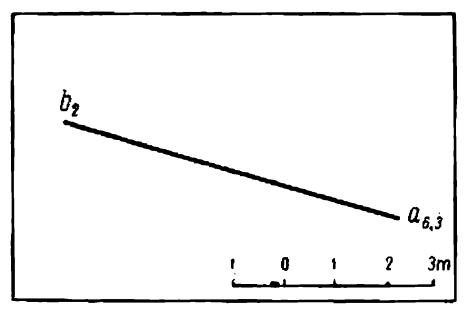


Fig. 422

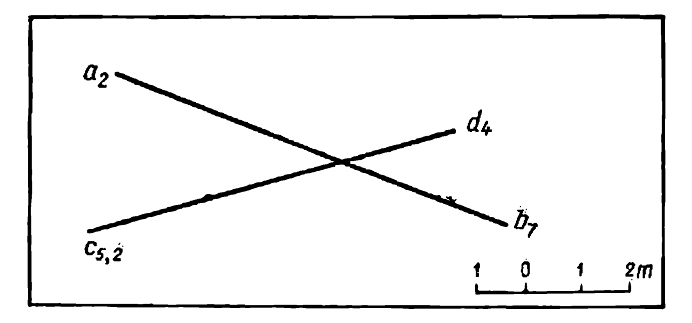


Fig. 423

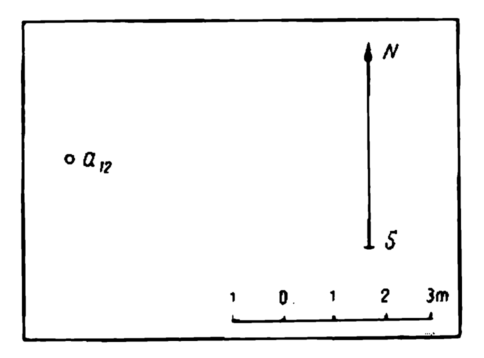


Fig. 424

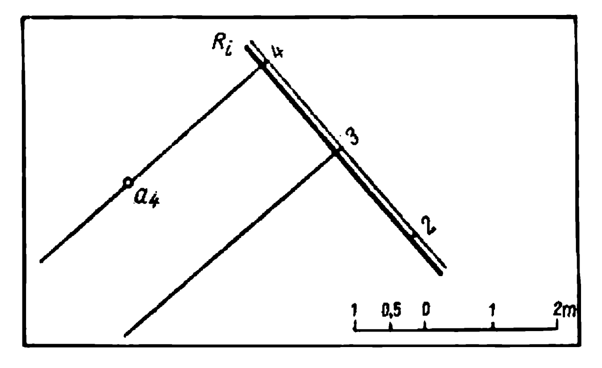


Fig. 425

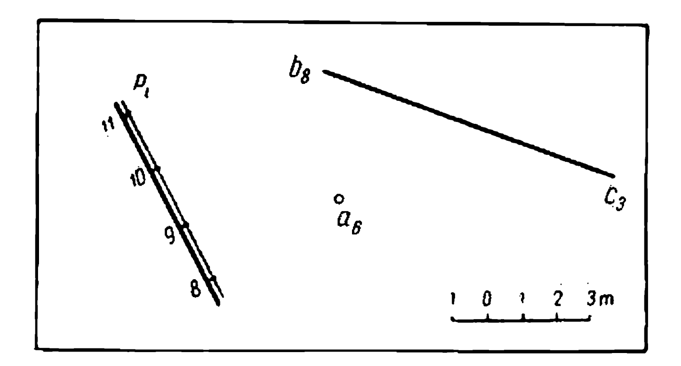


Fig. 426

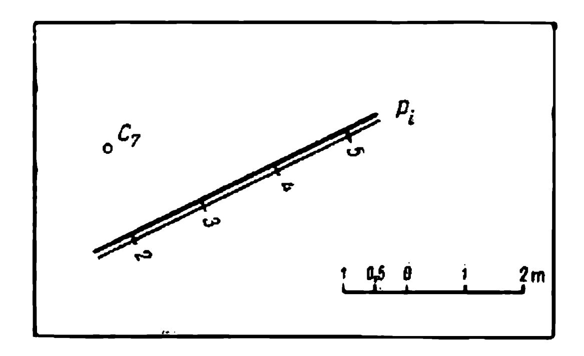


Fig. 427

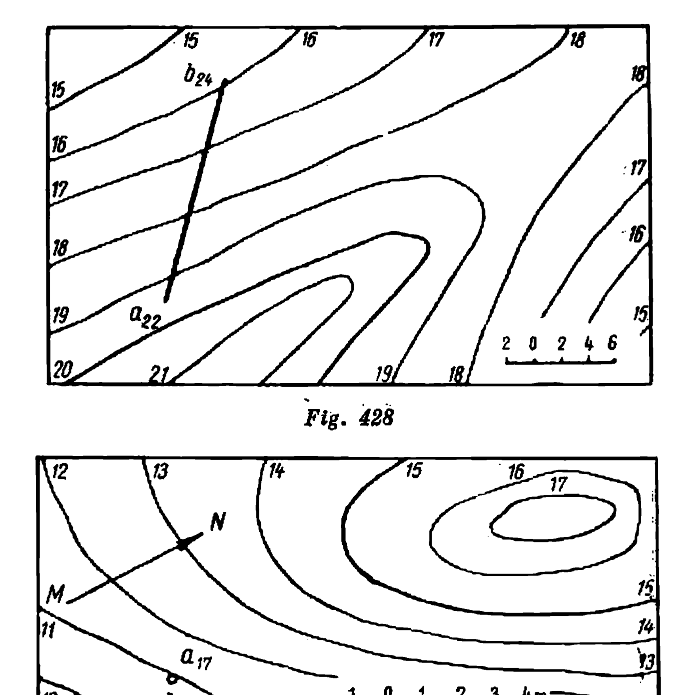


Fig. 428

Fig. 429

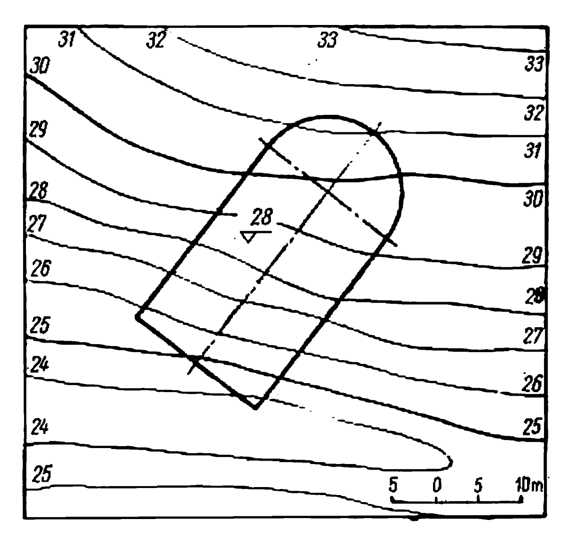


Fig. 430

6. On donne le centre d'une sphère C et un plan tangent P (fig. 427) ; construire la projection de la sphère.

7. Construire la ligne d'intersection d'une surface topographique et d'un plan de pente $i = 1 : 2$ passant par la droite donnée AB (fig. 428).

8. Construire l'ombre d'un poteau vertical AB projetée sur une surface topographique, la hauteur du poteau étant de 6 m et les rayons lumineux formant avec

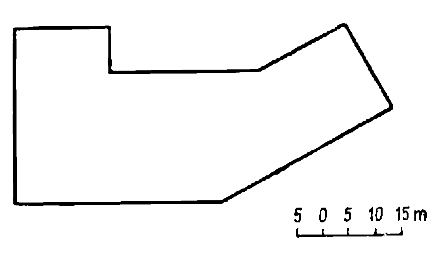


Fig. 431

l'horizon un angle de 45°. La direction des rayons est indiquée par la flèche MN sur la figure 429.

9. La cote de la plate-forme horizontale d'un chantier représenté sur la figure 430 est 28. Construire les lignes d'intersection des talus de remblai et de déblai avec la surface topographique. Les talus ont tous une pente $i = 1 : 2$.

10. Construire la ligne d'intersection des pentes d'un toit dont le contour est représenté sur la figure 431. Toutes les pentes ont la même inclinaison, et leur nombre est égal à celui des côtés du contour.

TROISIÈME PARTIE

OMBRES DANS LES PROJECTIONS ORTHOGONALES ET EN PERSPECTIVE

CHAPITRE XVI

PRINCIPES GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES OMBRES

§ 88. Généralités

Pour rendre un dessin plan plus suggestif et son intelligence immédiate, on recourt à la construction des ombres. Les ombres s'emploient surtout lors de l'établissement de projets d'architecture (façades des édifices et des ouvrages d'art).

Le but principal de la théorie des ombres est de déterminer les ombres *propre* et *portée* d'un corps considéré.

On appelle ombres propres celles qui s'obtiennent sur la surface non éclairée du corps lui-même; *les ombres projetées par le corps sur le plan de projection ainsi que sur d'autres corps se nomment ombres portées*. Un point et une droite n'ont pas d'ombre propre.

Lors de la construction des ombres on suppose que 1) la source lumineuse se trouve à l'infini; 2) la propagation de la lumière est rectiligne; 3) les rayons lumineux sont parallèles.

Le plus souvent la direction des rayons lumineux est choisie suivant l'une des diagonales d'un cube dont deux faces se confondent avec les plans de projection (fig. 432 et 433). Les projections des diagonales du cube sont alors les diagonales des carrés, c'est-à-dire chacune des projections du rayon lumineux forme avec la ligne de terre un angle de 45°.

L'ombre est dite *au soleil*, lorsque le corps est éclairé par des rayons parallèles, et *au flambeau*, lorsque la source de lumière se trouve à une petite distance du corps et que les rayons lumineux sont divergents.

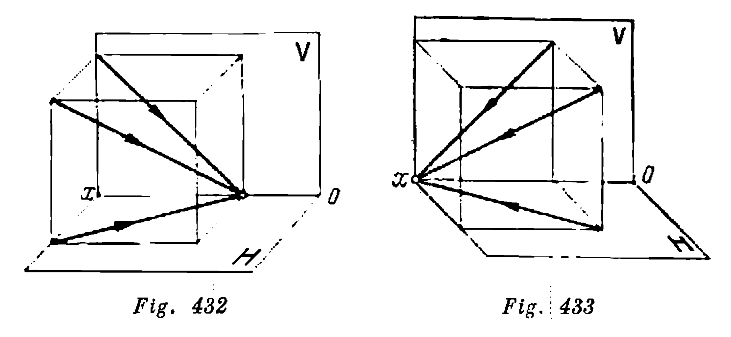


Fig. 432 *Fig. 433*

§ 89. Ombre d'un point

Soient un point A du premier quadrant et la direction des rayons lumineux (fig. 434). Un des rayons lumineux est intercepté par le point A. Là où ce rayon coupe le plan de projection, apparaît l'ombre portée du point considéré. En d'autres termes, *l'ombre portée par un point est la trace d'un rayon lumineux qui passe par le point considéré*. Son ombre tombe sur celui des plans de projection que le rayon lumineux rencontre le premier. Ainsi, sur la figure 434, le plan H est percé par le rayon en A_H avant que le plan V. Le point A_H est la trace horizontale du rayon, mais il est l'ombre portée du point A sur le plan H. D'une façon analogue, le point A_V est la trace frontale du rayon et l'ombre du point A sur le plan V.

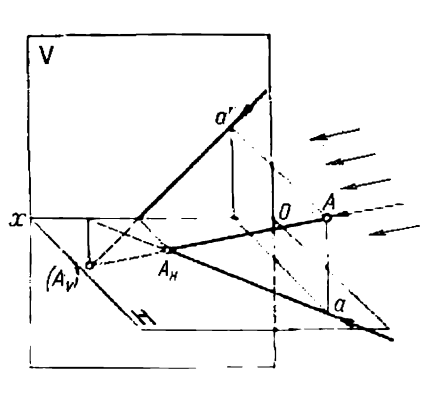


Fig. 434

De ces deux ombres, la première (A_H) est *réelle*, et la deuxième (A_V) est *virtuelle*. L'ombre portée du point sur le plan H est réelle parce que dans l'exemple considéré le rayon atteint le plan H avant le plan V. Convenons de mettre entre parenthèses les notations affectées aux ombres virtuelles. Les figures 435 et 436 montrent la construction des ombres portées d'un point sur une épure. Dans

le deuxième exemple, l'ombre réelle est l'ombre portée d'un point sur le plan *V*.

Il est clair que seuls les points du premier quadrant peuvent avoir des ombres réelles.

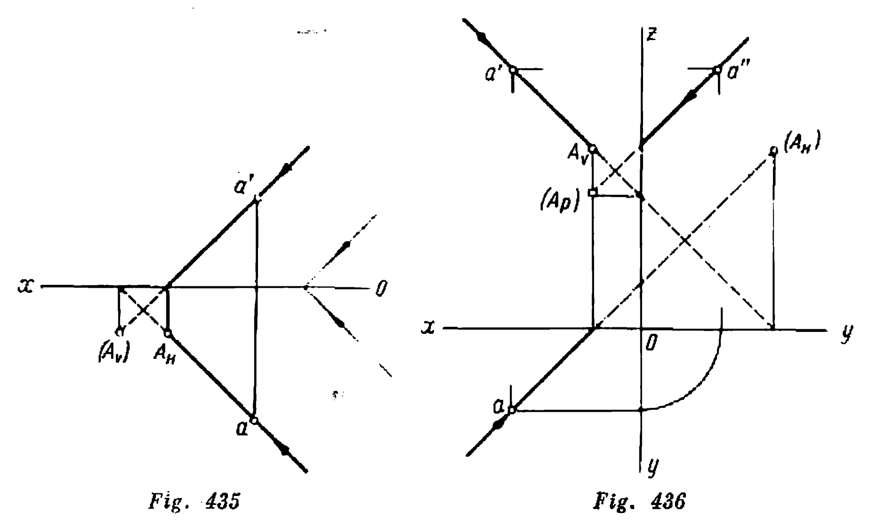


Fig. 435 *Fig. 436*

§ 90. Ombre d'une droite

Pour construire l'ombre portée d'une droite sur un plan de projection, il faut déterminer les ombres de ses deux points quelconques.

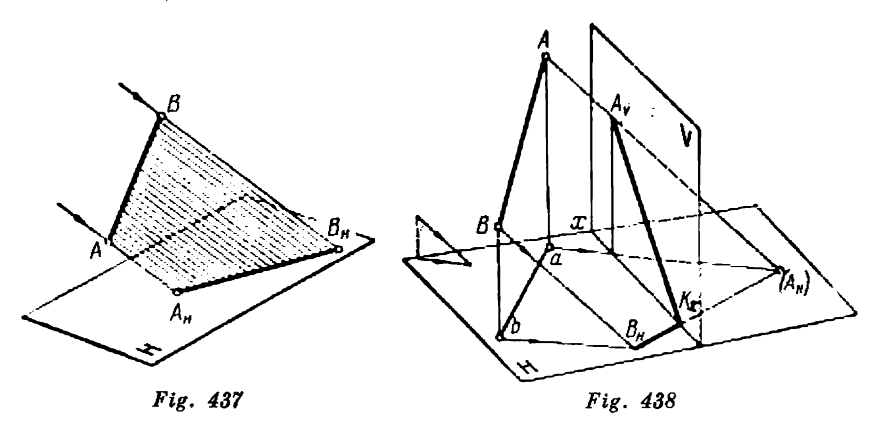


Fig. 437 *Fig. 438*

L'ombre cherchée est la droite qui joint ces points (fig. 437). La droite $A_H B_H$ peut être considérée également comme la trace d'un plan d'ombre qui passe par la droite considérée *AB*.

Pour construire l'ombre portée d'un segment de droite sur deux plans de projection, on procède dans l'ordre suivant.

1. Construire l'ombre portée du segment sur un des plans de projection en supposant que le deuxième n'existe pas. Ainsi, dans les exemples donnés par les figures 438 et 439, on a construit d'abord l'ombre portée du segment sur le plan H.

2. Si l'ombre ainsi construite coupe la ligne de terre (l'axe Ox), le point d'intersection K_x est celui où l'ombre se brise en passant

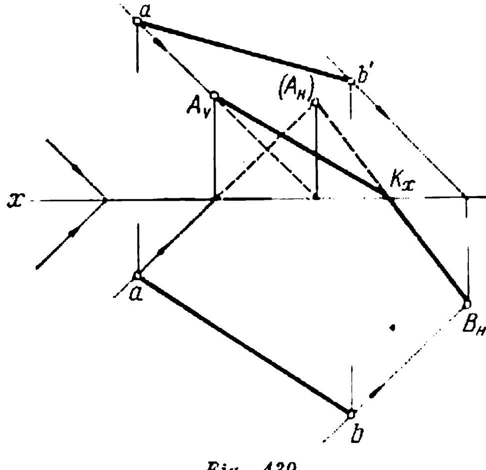


Fig. 439

d'un plan de projection à l'autre. Après avoir établi laquelle des deux ombres des extrémités du segment est virtuelle, on détermine son ombre réelle sur le deuxième plan de projection. C'est le point vers lequel est dirigée l'ombre brisée du segment. Sur les figures 438 et 439 ce point est l'ombre réelle A_V.

3. Lorsqu'un segment de droite se situe dans des quadrants différents, il faut dégager avant tout celle de ses parties qui se trouve dans le premier quadrant. A cet effet il faut trouver les traces du segment donné.

§ 91. Ombre portée d'une figure plane

Soit une plaque opaque triangulaire (fig. 440). Pour obtenir son ombre il faut construire les ombres de ses côtés. L'ombre portée d'un triangle sur un plan de projection est généralement un triangle. L'aire $A_HB_HC_H$ délimitée par les ombres des côtés du triangle est l'ombre cherchée de la plaque. Le contour de cette ombre portée peut être considéré comme la section d'un prisme d'ombre dont les

arêtes constituent des rayons lumineux qui passent par les sommets du triangle donné.

La construction de l'ombre du triangle sur deux plans de projection doit être effectuée dans le même ordre que celle de l'ombre d'une droite (voir § 90). Ainsi, sur les figures 441 et 442 on a construit d'abord l'ombre portée du triangle sur le plan H en supposant que le plan V n'existe pas.

L'ombre réelle est celle qui se trouve dans le demi-plan avant H. C'est la partie de l'ombre qu'on laisse subsister. On construit ensuite

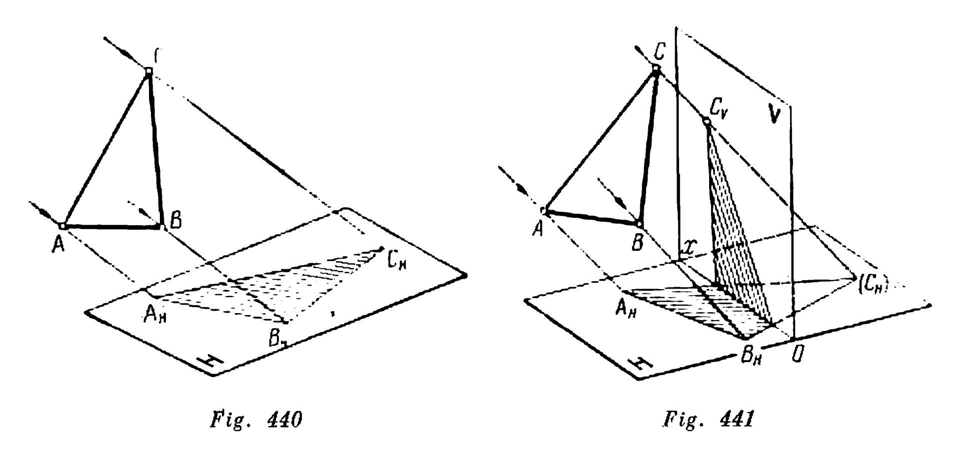


Fig. 440 *Fig. 441*

l'ombre portée du triangle sur le plan V. Dans l'exemple considéré il suffit pour cela de déterminer l'ombre portée par le sommet C sur le plan V. La construction est achevée en joignant C_V avec les points où les ombres des côtés AC et BC se brisent.

L'examen de la position relative des rayons lumineux et du plan de la figure considérée permet d'établir de quelle façon ses projections sont éclairées. Un exemple de détermination de l'ombre propre d'un triangle ABC est donné par la figure 443. D'abord, on mène par le point D situé à l'intérieur du contour du triangle le rayon lumineux DE. Ensuite on établit la position relative du rayon DE et du côté AB comme il a été dit au § 13. La projection horizontale du rayon visuel perpendiculaire au plan V et passant par le point d'intersection des projections frontales AB et DE montre que le côté AB est plus proche de l'observateur que le rayon DE. Par conséquent, le côté du triangle en regard de l'observateur placé devant le triangle et le plan V est couvert par l'ombre propre. C'est pourquoi sur la figure 443 la projection frontale du triangle est hachurée.

Le rayon visuel perpendiculaire au plan H et passant par le point d'intersection des projections horizontales AB et DE permet

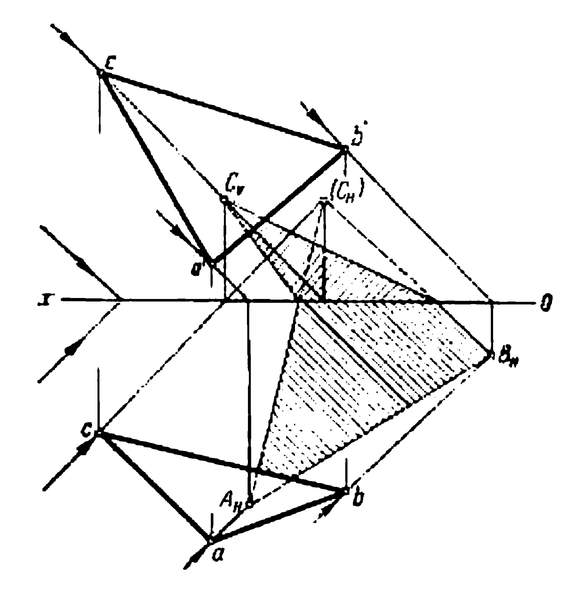


Fig. 442

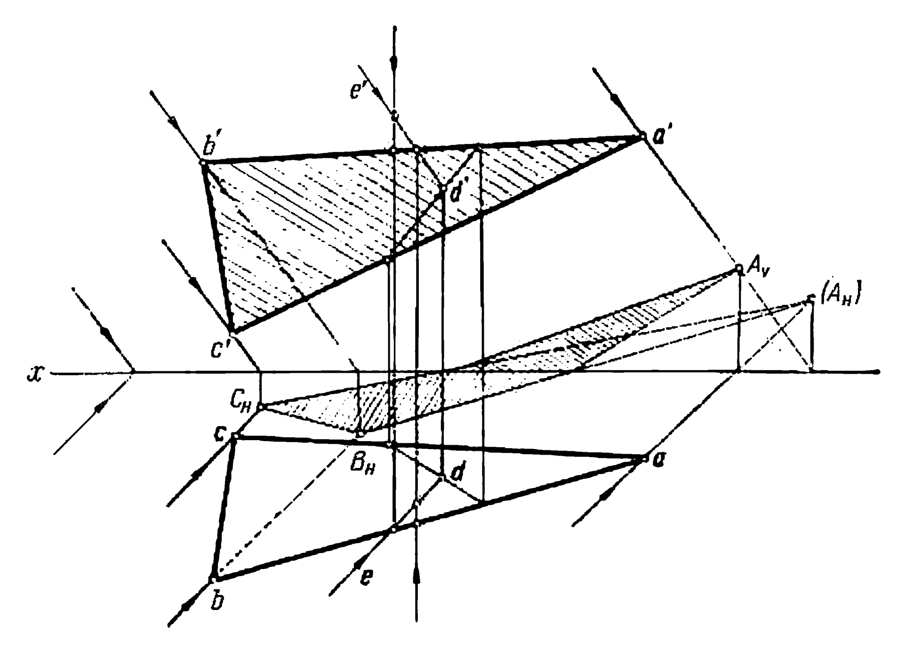


Fig. 443

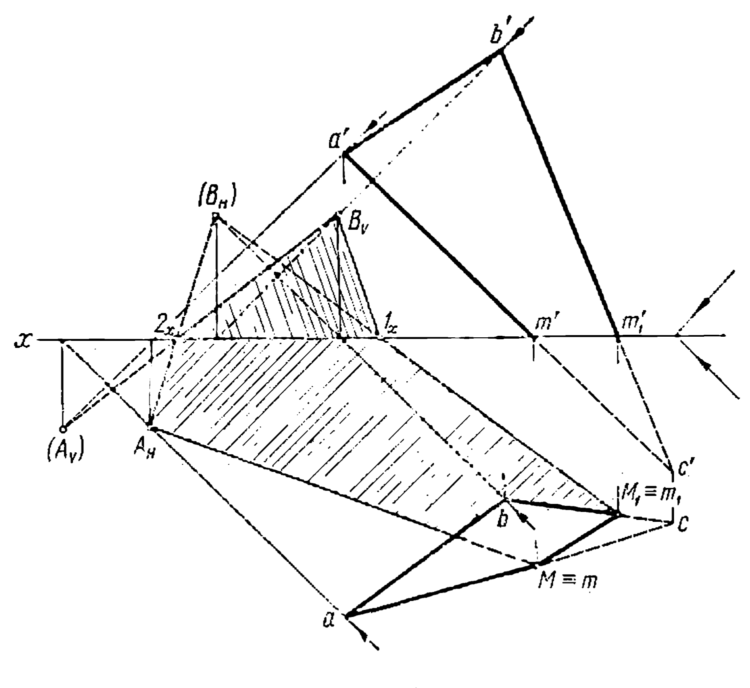


Fig. 444

de déduire que la projection horizontale du triangle vue d'en haut est éclairée.

Considérons encore un exemple de construction de l'ombre portée d'un triangle ABC, dont une partie se trouve en dehors du premier quadrant (fig. 444).

D'après la méthode exposée au § 90, on dégage d'abord la partie visible du triangle, c'est-à-dire celle qui se situe dans le premier quadrant. Dans ce but on cherche les traces horizontales M et M_1 des deux côtés AC et BC. On construit ensuite l'ombre portée du triangle sur un des plans de projection en supposant que le deuxième plan n'existe pas, et dans ces conditions, on commence par l'ombre sur celui des plans qui coupe la figure donnée.

Dans notre exemple, le triangle coupe le plan de projection horizontal, et c'est pourquoi les premiers points trouvés sont les traces horizontales A_H et (B_H) des rayons passant par les sommets A et B.

En joignant ces points respectivement à M et M_1 on obtient les ombres des côtés AC et BC sur H. Le contour de l'ombre du triangle est fermé par le segment $A_H(B_H)$ qui est l'ombre du côté AB.

L'intersection du contour de l'ombre avec la ligne de terre Ox indique que l'ombre portée du triangle passe du plan H dans le plan V. Après avoir déterminé la trace frontale du rayon qui passe par le point B, on obtient B_V. En joignant l'ombre portée du point B sur le plan V aux points 1_x et 2_x, on obtient le contour de l'ombre portée du triangle sur le plan V, opération qui achève la solution du problème posé.

§ 92. Méthode des recoupements d'ombres

La méthode des recoupements d'ombres est appliquée pour obtenir les ombres portées par un corps sur un autre.

On construit d'abord les ombres portées des figures géométriques données sur un des plans de projection pour trouver les points d'intersection des ombres. Par les points ainsi obtenus on mène un rayon

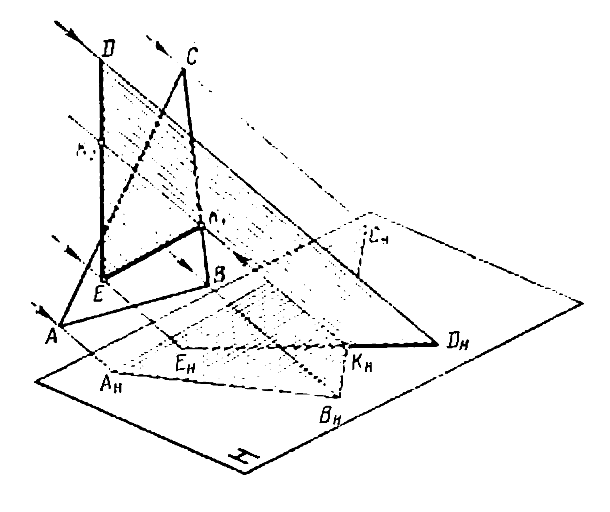


Fig. 445

dans le sens opposé à celui des rayons lumineux. Chacun des rayons inverses en recoupant les éléments géométriques donnés détermine les points nécessaires pour la construction de l'ombre.

Illustrons l'application de cette méthode par l'exemple de la construction de l'ombre d'une droite sur le plan d'un triangle. La figure 445 représente la construction des ombres portées du triangle ABC et de la droite DE sur le plan H. Par le point K_H commun aux ombres de la droite DE et du côté BC on mène un rayon inverse qui coupe les droites considérées respectivement en K_1 et en K_2.

Le point K_1 constitue l'ombre du point K_2 de la droite DE sur la droite BC. L'ombre cherchée est déterminée par les points K_1 et E, ce deuxième étant l'intersection de la droite DE avec le triangle.

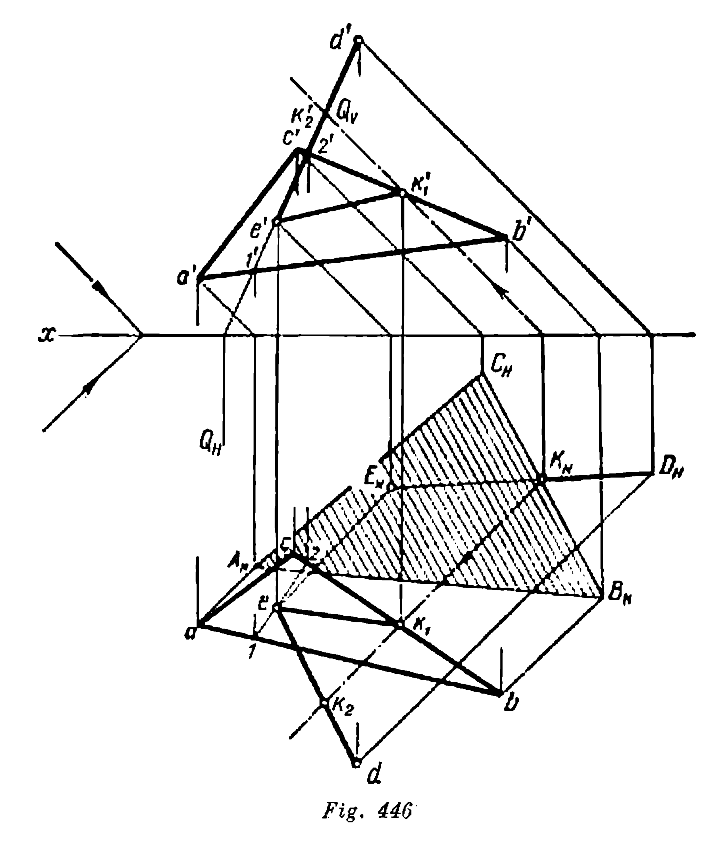


Fig. 446

La solution de ce problème sur l'épure est donnée sur les figures 446 et 447. Dans le premier cas, l'ombre de la droite DE sur le plan du triangle s'obtient par la méthode des recoupements, et dans le deuxième, à l'aide de deux points E et D_Δ, où le plan du triangle est respectivement coupé par la droite donnée et le rayon lumineux passant par D. Les plans $Q \perp V$ et $R \perp H$ sont les plans projetants menés par la droite DE et le rayon pour trouver les points considérés. Le point D_Δ se trouvant au-delà du contour ABC, une partie de l'ombre de la droite se situe sur le plan du triangle, et une autre, sur le plan de projection.

La confrontation des deux solutions permet de conclure que dans le premier cas il n'y a aucune nécessité de déterminer le point d'in-

tersection du rayon lumineux passant par D avec le plan du triangle. Les avantages de la méthode des recoupements deviennent plus

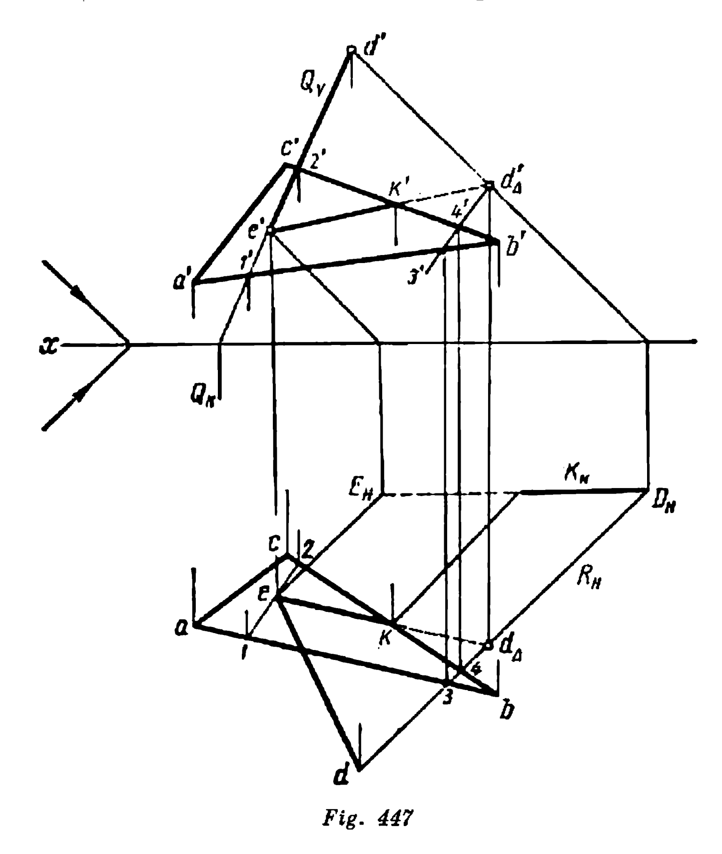


Fig. 447

évidents lors de la construction des ombres d'un polyèdre sur un autre polyèdre et des ombres propres des corps délimités par des surfaces courbes.

OMBRES DES CORPS GÉOMÉTRIQUES

§ 93. Ombres des polyèdres

Soit un tétraèdre $SABC$ éclairé par un faisceau de rayons lumineux parallèles (fig. 448). Construire les ombres portée et propre du tétraèdre donné.

On mène à cet effet par chacun de ses sommets des rayons lumineux parallèles à la direction imposée et on trouve les points de leur intersection avec un des plans de projection, H par exemple, qui sont les ombres des sommets du tétraèdre sur le plan H. En les joignant entre eux, on obtient l'ombre d'une « charpente » de polyèdre. Mais le polyèdre considéré est un solide opaque dont l'ombre forme une certaine figure. Dans le cas considéré le contour de l'ombre portée est constitué par le triangle $A_H B_H (S_H)$. Ce triangle est une section du prisme d'ombre par le plan H. Puisqu'une partie de l'ombre se situe sur le demi-plan arrière H, il faut déterminer en plus l'ombre du sommet S sur le plan V. L'ombre réelle du S_V est jointe aux points de brisure de l'ombre sur la ligne de terre.

Le lieu géométrique des points communs de la surface du prisme d'ombre et du polyèdre donné forme une ligne polygonale fermée qui sépare la partie éclairée de la partie obscure. Cette ligne s'appelle *ligne d'ombre propre* ou *séparatrice*. A chaque point K de la séparatrice correspond un point K_H de la ligne d'ombre portée. *On en déduit que la ligne d'ombre portée est l'ombre projetée par la séparatrice*

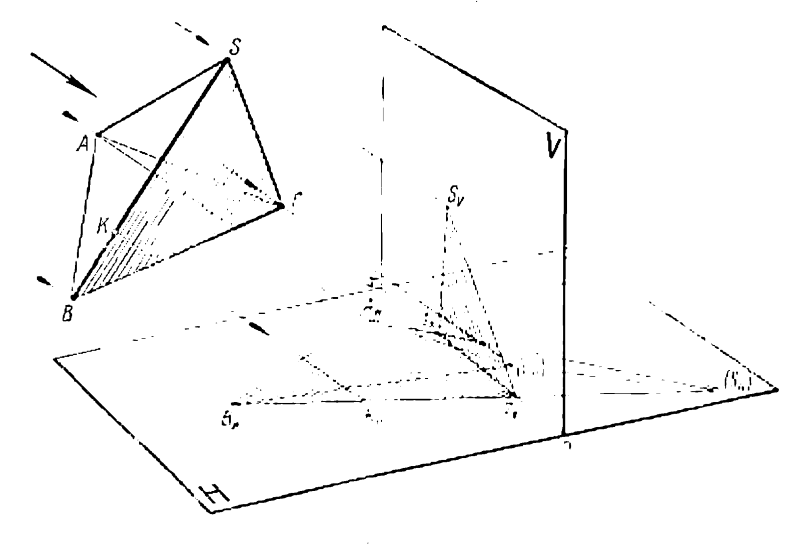


Fig. 448

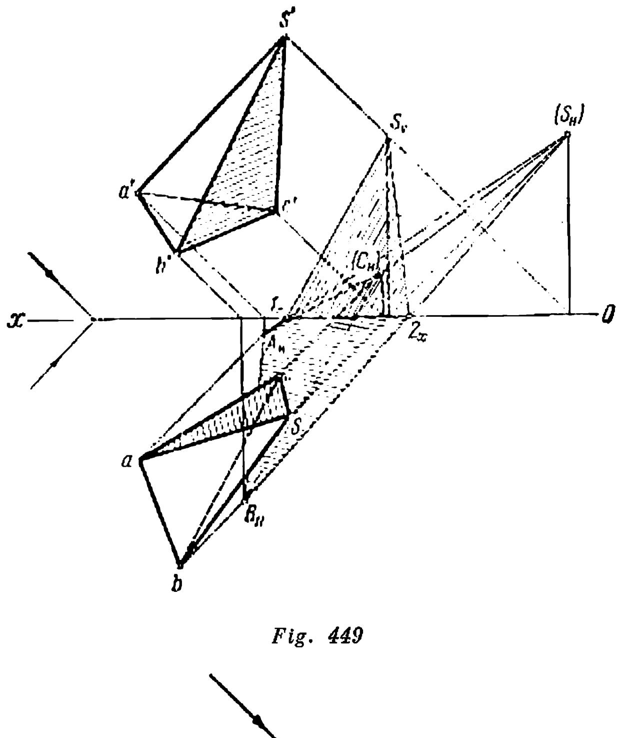


Fig. 449

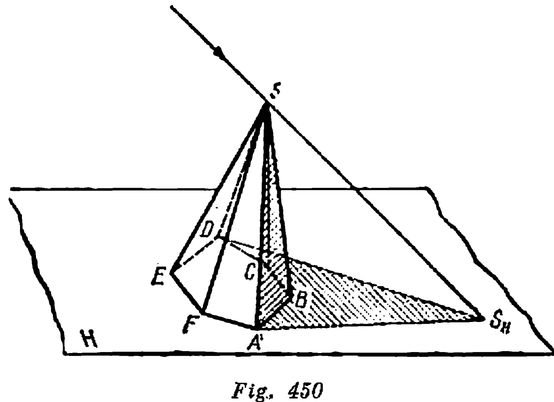


Fig. 450

sur le plan de projection. D'après la première on définit aisément la seconde. En effet, dans notre cas la ligne $A_HB_HS_VA_H$ délimite l'ombre portée; donc les arêtes AB, BS et SA séparent les faces éclairées du tétraèdre des faces obscures, c'est-à-dire la séparatrice est la ligne polygonale fermée $ABSA$. Cette ligne délimite la face ABS éclairée car elle se trouve en regard de la source de lumière.

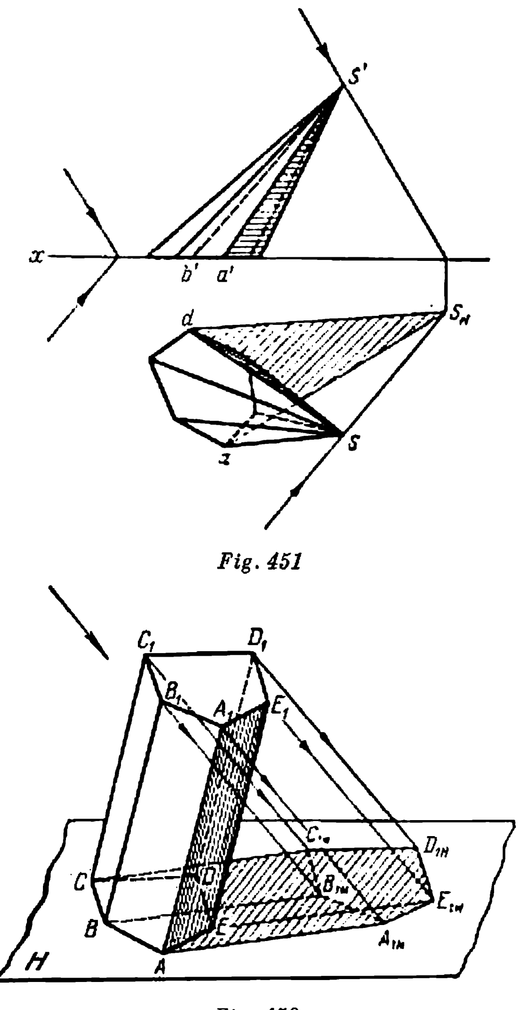


Fig. 451

Fig. 452

Les autres faces du tétraèdre sont couvertes par l'ombre propre. La solution du problème considéré sur une épure est donnée par la figure 449; on y construit d'abord l'ombre du tétraèdre sur H, puis à l'aide de l'ombre réelle S_V on trouve la ligne d'ombre portée sur V.

La construction des ombres est simplifiée lorsque la base du polyèdre repose dans le plan de projection. Dans ce cas tous les sommets de la base se confondent avec leurs ombres. Pour construire

l'ombre d'une pyramide (fig. 450 et 451), il suffit de trouver l'ombre de son sommet et de joindre le point S_H ainsi obtenu avec les points extrêmes de la base. *Les faces de la pyramide adjacentes à l'ombre portée se trouvent dans leur ombre propre.*

Pour déterminer l'ombre portée par un prisme sur le plan de sa base inférieure (fig. 452), on mène par les sommets de sa base supérieure des rayons lumineux pour trouver les points A_{1H}, B_{1H}, ..., E_{1H} d'intersection des rayons avec H. La figure $AA_{1H}E_{1H}D_{1H}C_{1H}C$ est l'ombre cherchée du prisme portée sur H. La ligne d'ombre portée permet d'établir la séparatrice $AA_1E_1D_1C_1CBA$.

§ 94. Ombres de l'intersection des polyèdres

Le problème de la construction des ombres dans le cas de l'intersection des polyèdres ne se borne pas à déterminer les séparatrices et les lignes d'ombres portées sur le plan de projection. Sa résolution

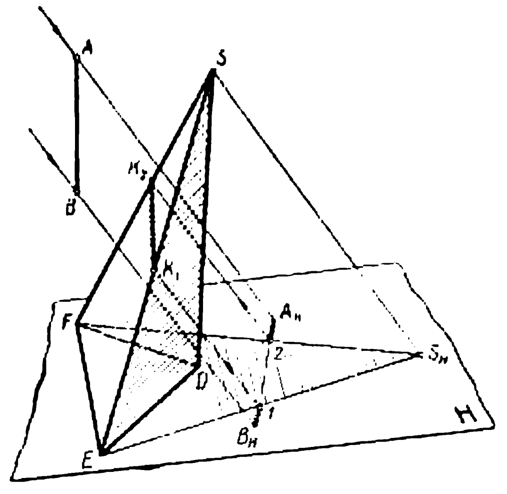


Fig. 453

impose la construction des ombres portées des faces obscures d'un corps sur les faces éclairées de l'autre qui les coupent.

Chaque élément de la ligne cherchée représente donc l'intersection du plan d'ombre passant par l'arête d'une face obscure d'un polyèdre avec la face éclairée du deuxième. Ainsi, toutes les constructions se fondent sur la détermination de l'ombre d'une droite sur un plan. Un tel problème a été étudié au § 92 où la solution a été recherchée à l'aide de la méthode des recoupements. Cette méthode est illustrée dans son principe par la figure 453 qui montre la construction de

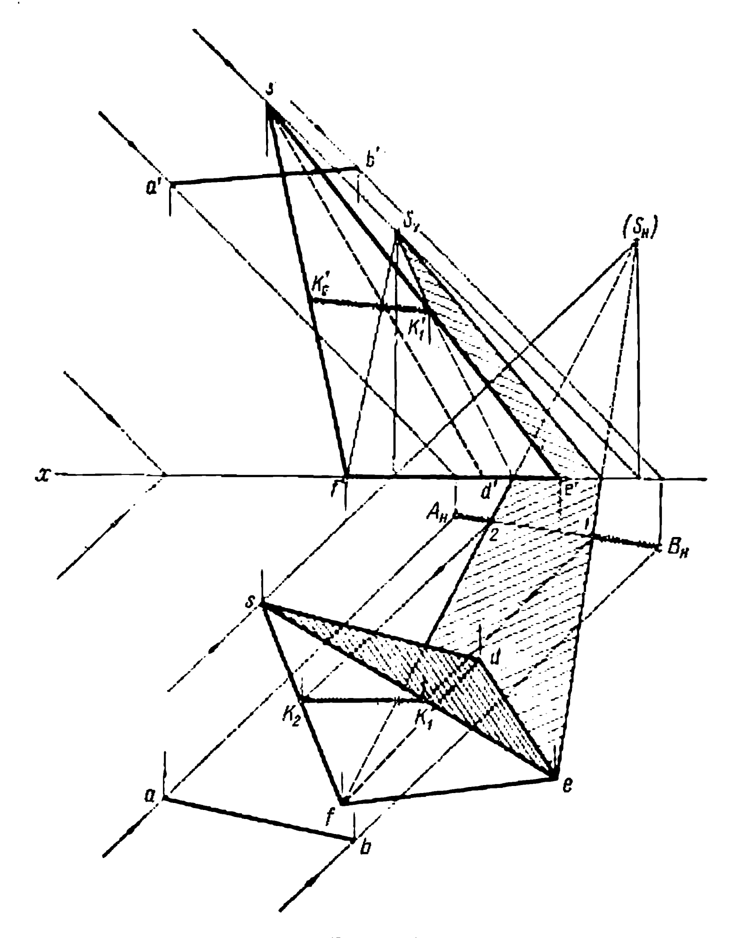


Fig. 454

l'ombre portée par une droite AB sur la face SEF d'une pyramide triangulaire. On trouve d'abord les ombres portées de la droite et de la pyramide sur le plan H. Des rayons inverses sont menés des points d'intersection des ombres (points *1* et *2*). Les points K_1 et K_2 d'intersection des rayons inverses et des arêtes de la pyramide déterminent la droite qui constitue l'ombre de AB sur la face SEF. L'application de la méthode des recoupements pour la solution de ce problème sur une épure est montrée sur la figure 454.

Considérons l'intersection des deux polyèdres représentés sur la figure 455. On construit d'abord leurs lignes d'ombres portées sur le plan H lesquelles permettent de déterminer les ombres propres.

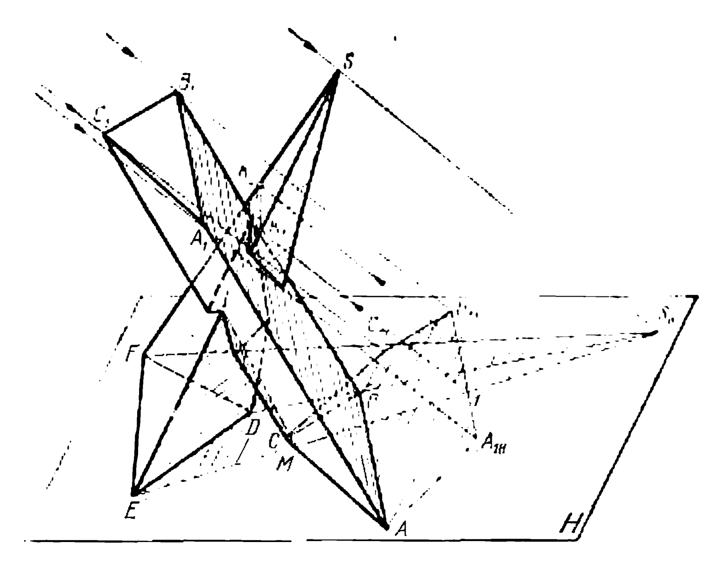


Fig. 455

Sur la figure 455, deux faces latérales (SDE et SDF) de la pyramide et deux (ABB_1A_1 et BCC_1B_1) du prisme ne sont pas éclairées. On établit ensuite si une face obscure d'un corps rencontre une face éclairée de l'autre.

Dans notre exemple deux faces obscures du prisme coupent la face éclairée SEF de la pyramide, et la face obscure SDE de la pyramide rencontre la face éclairée ACC_1A_1 du prisme. Considérons successivement chaque couple de faces examinées.

Lors de la construction de l'ombre portée par la face ABB_1A_1 du prisme sur la face SEF de la pyramide on utilise les rayons inverses menés par les points *1* et *2*. En ces points les ombres des arêtes SE et SF coupent l'ombre de l'arête A_1B_1. Les points K_1 et K_2 obtenus à l'aide des rayons inverses déterminent l'ombre de l'arête A_1B_1 sur la face de la pyramide. L'ombre portée de la pyramide sur la face ACC_1A_1 du prisme est limitée par l'ombre de l'arête SE. L'ombre de cette arête, brisée en M, passe du plan H sur la face éclairée du prisme. Les points I où l'arête SE coupe la face et M déterminent la limite cherchée de l'ombre portée. La ligne d'ombre de la face BCC_1B_1 sur la face éclairée de la pyramide est cachée et donc nous ne la construisons pas.

La méthode des recoupements est très commode, mais elle n'est pas la seule employée pour la construction de l'ombre portée par un polyèdre sur un autre polyèdre. Dans certains cas il est avantageux

d'utiliser les points d'intersection des arêtes avec les faces sur lesquelles tombe l'ombre de l'arête considérée. Il arrive que ces points dépassent les limites de la face. Ainsi sur la figure 456, l'ombre de l'arête SA de la pyramide sur la face du prisme s'obtient à l'aide des points K_1 et K_2 où l'arête SA coupe les faces du prisme EFF_1E_1 et FDD_1F_1 prolongées au-delà de leurs contours. L'ombre de l'arête SA sur le plan de la première face est déterminée par les points K_1 et S_P. Ce dernier présente l'ombre portée par le sommet S sur la face EFF_1E_1. En L_1 l'ombre de l'arête est brisée et passe d'une face sur une autre.

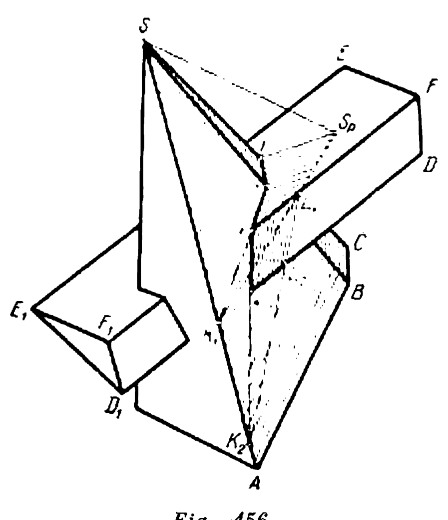


Fig. 456

§ 95. Ombres des surfaces courbes

Les rayons lumineux tangents à un corps de forme quelconque forment dans le cas général un cylindre d'ombre et non pas un prisme, comme il en est dans le cas des polyèdres. La ligne de contact du cylindre d'ombre et du corps considéré forme la ligne de séparation entre l'ombre et la lumière. Cette ligne est la *séparatrice*. La ligne d'intersection du cylindre d'ombre avec le plan de projection ou un autre corps constitue la *ligne d'ombre portée*. De même que précédemment la *ligne d'ombre portée est l'ombre projetée par la séparatrice.*

Dans certains cas, la séparatrice et la ligne d'ombre portée peuvent être construites indépendamment; dans d'autres, il est plus avantageux de déterminer d'abord la séparatrice et de trouver d'après cette dernière l'ombre portée; dans d'autres encore, de procéder à l'inverse. Les exemples donnés ci-dessous illustrent ce qui vient d'être dit.

Exemple 1. *Construire les ombres propre et portée d'une sphère* (fig. 457). Dans ce cas les sections perpendiculaires aux génératrices du cylindre d'ombre ont la forme de cercles. Une de ces sections par le plan P passant par le centre de la sphère constitue la séparatrice qui correspond au grand cercle de la sphère. Sans donner le détail de la construction des projections de la séparatrice, notons que le nouveau plan V_1 est parallèle au rayon lumineux. Dans le nouveau système V_1/H, le plan P devient projetant. La ligne d'ombre portée est produite par la trace de la surface d'ombre. Dans notre exemple c'est une ellipse, dont le centre est l'ombre du centre de la sphère.

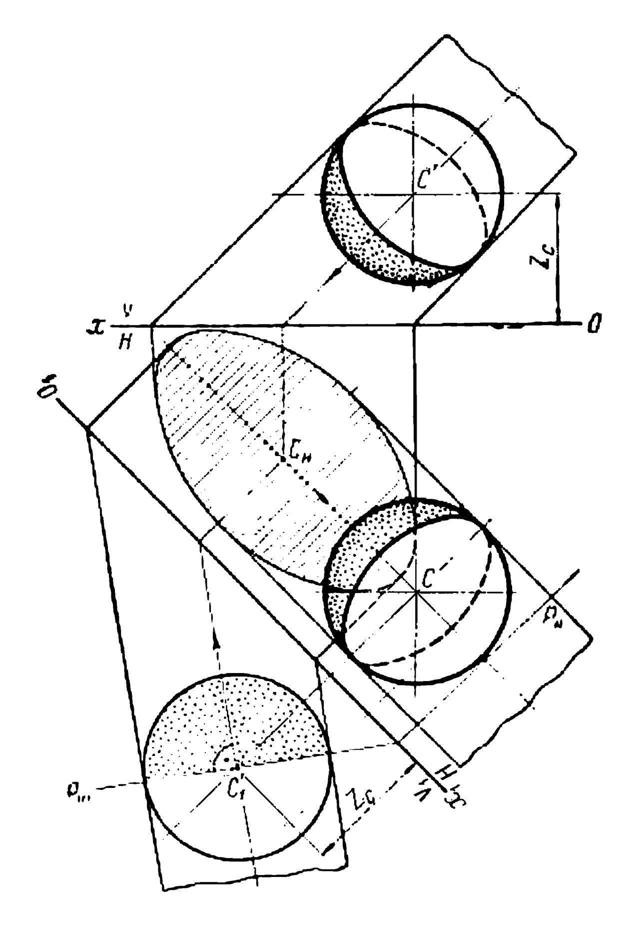


Fig. 457

Exemple 2. *Construire les ombres propre et portée des cônes et des cylindres situés dans l'espace d'une façon différente.*

Les rayons lumineux tangents au cône forment deux plans et une surface cylindrique (fig. 458). Pour construire la ligne d'ombre portée, on détermine les ombres des sommets et de la base du cône. Ensuite à partir du point S_H on mène des tangentes au contour courbe l_H qui est l'ombre de la base du cône. Les segments des tangentes $S_H M_H$ et $S_H N_H$ sont les ombres de telles génératrices du cône qui séparent sa partie éclairée et obscure. Les rayons inverses permettent d'obtenir les points M et N de la base du cône, et en les joignant au sommet S d'obtenir la solution. Il convient de retenir que la ligne d'ombre propre est constituée par les génératrices et l'arc de la base trouvés (MAN).

La construction des ombres propre et portée d'un cylindre (fig. 459) se distingue de la précédente par la nécessité de déterminer l'ombre portée de la base supérieure au lieu de l'ombre du sommet S.

Pour résoudre ce problème sur l'épure de la figure 460 on a construit d'abord l'ombre portée par le cylindre sur le plan H. Les tangentes aux deux ellipses l_H et l_{1H} sont les ombres des génératrices AA_1 et BB_1 qui séparent la partie éclairée

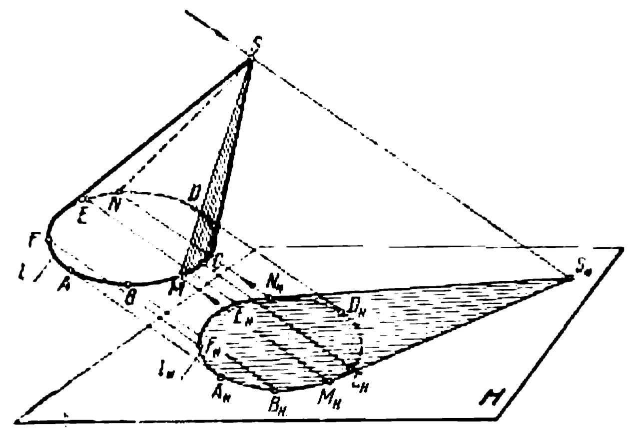


Fig. 458

de la surface du cylindre de sa partie obscure. Les points A, A_1, B, B_1 des bases de cylindre s'obtiennent à l'aide des rayons inverses. Puisqu'une partie de l'ombre portée se situe sur le demi-plan arrière H, pour achever la construction il faut déterminer les traces frontales des rayons qui passent par les points B, D, E et B_1.

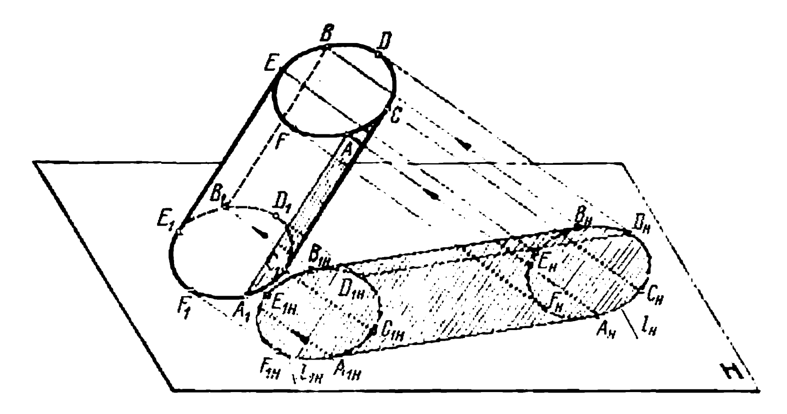


Fig. 459

La solution devient nettement plus simple lorsque la base du cylindre ou du cône repose dans un des plans de projection. Dans ce cas il n'est plus nécessaire de chercher les ombres des points de la base contenue dans le plan de projection.

Le tracé rectiligne des ombres propre et portée du cylindre (fig. 461) s'obtient aisément à l'aide des plans R_1 et R_2 tangents au cylindre et parallèles au rayon lumineux. Pour déterminer la direction des traces R_{1H} et R_{2H}, il faut construire le plan P parallèle aux rayons lumineux et aux génératrices du cylindre (voir § 48, exemple 3). Les génératrices A_1A et E_1E, lignes de contact des plans R_1

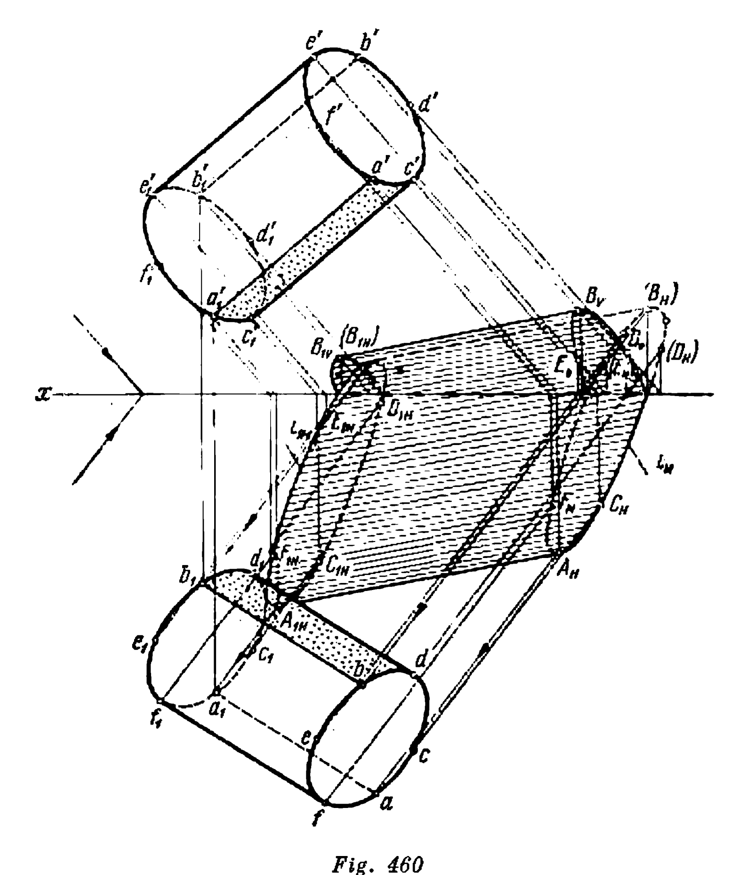


Fig. 460

et R_2 et du cylindre, séparent leurs parties éclairée et obscure. L'arc ACE de la base supérieure ferme la séparatrice. Les traces horizontales des plans d'ombre tangents et l'ombre de l'arc ACE de la base supérieure forment la ligne d'ombre portée.

La particularité de l'exemple représenté sur la figure 462 réside dans le fait que pour construire les ombres du cylindre on n'a tracé qu'un seul rayon lumineux qui permet de trouver l'ombre C_H du centre de la base supérieure. Situées dans deux plans parallèles, la base supérieure et son ombre forment deux figures congruentes. Dans notre exemple ce sont deux cercles égaux.

Lors de la construction de l'ombre du cône représenté sur la figure 463, la surface d'ombre est formée par deux plans tangents au cône et parallèles aux

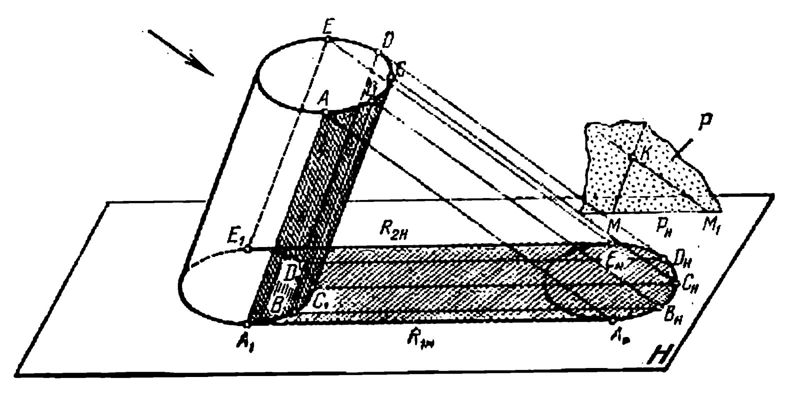


Fig. 461

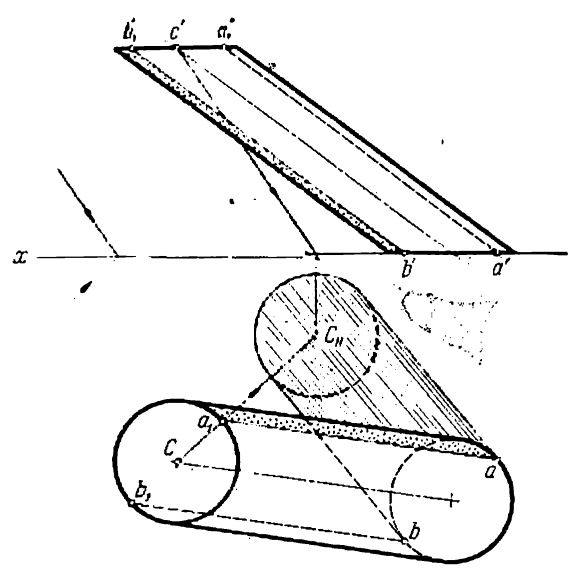


Fig. 462

rayons lumineux. Les traces de ces plans délimitent l'ombre portée du cône, et les génératrices SA et SB qui sont les lignes de contact de ces plans avec le cône constituent la séparatrice.

E x e m p l e 3. *Construire les ombres propre et portée d'une surface de révolution non réglée quelconque* (fig. 464).

Considérons d'abord la construction pour le cas de rayons lumineux parallèles au plan V.

La ligne d'ombre propre est la ligne de contact de la surface donnée avec le cylindre d'ombre. Tout rayon lumineux tangent à la surface de révolution en un certain point courant A doit appartenir au plan tangent à la surface qui passe par

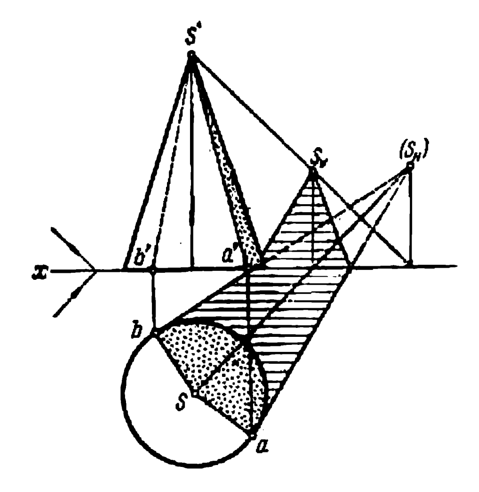


Fig. 463

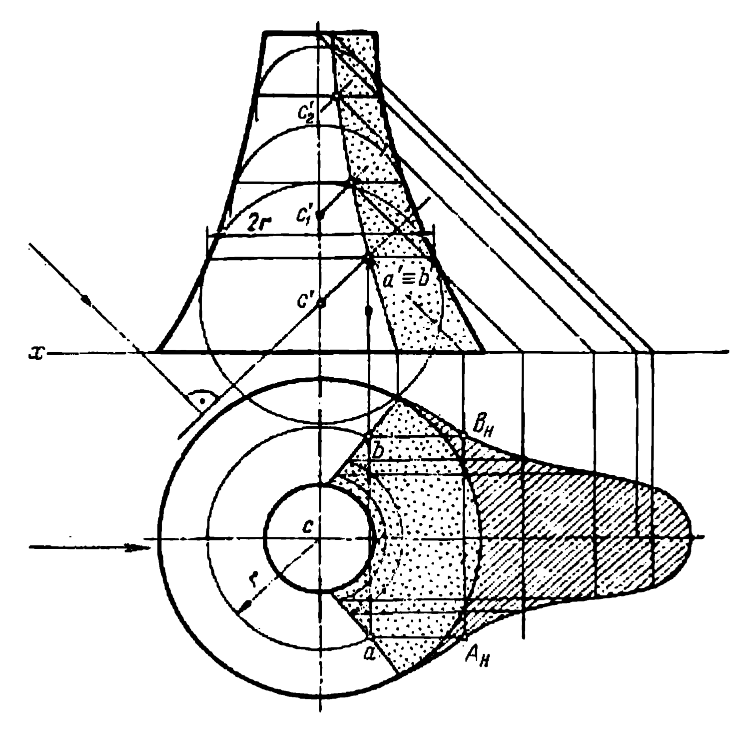


Fig. 464

ce point. Ainsi le problème peut être ramené à la détermination du lieu géométrique des points de contact de la surface considérée avec les plans parallèles au rayon lumineux. Pour résoudre le problème ainsi énoncé, on inscrit des sphères dans la surface de révolution et on construit les projections des cercles de contact de chaque sphère avec la surface donnée. Ainsi, la sphère de centre C a le cercle de contact de rayon r. Le rayon de la sphère auxiliaire mené par le point de contact cherché doit être normal au plan tangent. Cela signifie que la projection frontale du rayon $c'a'$ forme un angle droit avec la projection de même indice de la

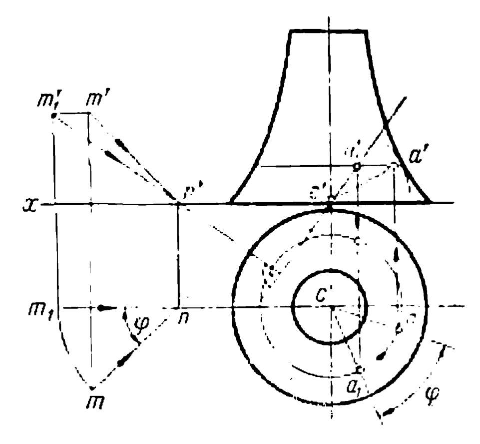


Fig. 465

frontale du plan tangent. Dans notre exemple, le plan tangent doit être parallèle aux rayons lumineux frontaux. C'est pourquoi sur la figure 464, $c'a'$ est perpendiculaire à la projection frontale du rayon. Le point A d'intersection du rayon avec le cercle de contact de la sphère et de la surface de révolution appartient à la ligne d'ombre propre cherchée. Les projections horizontales du point A et de sa symétrique B sont déterminées comme les points d'intersection de la projection horizontale du parallèle de rayon r et de la ligne de rappel. Les autres points s'obtiennent d'une manière analogue. La ligne d'ombre portée est construite comme l'ombre de la séparatrice.

Des constructions supplémentaires qu'il faut réaliser lorsque les rayons lumineux ne sont pas parallèles aux plans de projection sont montrées sur la figure 465. On construit d'abord ici les projections nouvelles (m_1n et $m_1'n'$) du rayon lumineux tourné d'un angle φ pour le rendre parallèle à V. Ensuite, d'après la méthode exposée dans ce qui précède, on trouve la projection du point A_1 appartenant à la séparatrice. Il reste à effectuer la transformation inverse de l'épure en faisant tourner les points ainsi trouvés autour de l'axe de la surface de révolution d'un angle φ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

§ 96. Ombres sur les façades des édifices

La construction des ombres sur les façades des édifices repose sur l'établissement des points d'intersection des rayons lumineux avec les plans verticaux de la façade ou des pentes du toit. Pour exécuter les constructions, il faut avoir à sa disposition en plus de

l'élévation principale une autre projection de l'édifice (plan ou élévation latérale).

Pour déterminer la ligne d'ombre portée qui est la projection parallèle de la séparatrice, il est recommandé de se guider par les règles suivantes.

1. *L'ombre d'une figure plane portée sur un plan parallèle est congruente à la figure elle-même*, car les sections d'un cylindre d'ombre par des plans parallèles sont toujours congruentes. L'ombre d'un segment de droite, notamment, portée sur un plan parallèle est égale et parallèle au segment lui-même.

2. *Si une droite est perpendiculaire à un certain plan P, l'ombre de la droite sur le plan P se confond avec la direction de la projection du rayon lumineux sur ce même plan.* Il en est ainsi parce que les rayons lumineux dans ce cas forment un plan projetant par rapport à P.

Par conséquent, si une droite est perpendiculaire au plan V, et donc à l'élévation principale, le plan d'ombre qui passe par cette droite est un plan projetant de bout. La trace frontale du plan d'ombre est parallèle à la projection de même indice du rayon. Un tel plan coupe une surface quelconque de la façade d'un édifice suivant la ligne dont la projection sur V est une droite qui se confond avec la trace du plan.

Appliquons les règles sus-indiquées à la construction des ombres sur la façade de l'édifice dont les projections orthogonales (élévation et plan) sont représentées sur la figure 466. Le segment KL de cette même figure détermine la direction du rayon lumineux.

Pour cela considérons la détermination des lignes d'ombre portée sur les éléments de la façade donnée représentés à une échelle plus grande.

La figure 467 donne la construction de l'ombre d'une corniche et d'une baie de fenêtre.

On mène par le point A (a, a') pris sur une arête de la corniche $I - I$ un rayon qui rencontre le plan vertical de la saillie inférieure en A_1 (a_1, a_1'). L'ombre portée de la droite $I - I$ passe par A_1 parallèlement à la droite elle-même. D'une façon analogue on trouve à l'aide du rayon qui passe par le point B, l'ombre de l'arête $II - II$ sur le plan du mur.

Ensuite on détermine l'ombre de la droite CD. Cette droite étant perpendiculaire au plan de la façade, son ombre est parallèle à la projection frontale du rayon lumineux. Après avoir trouvé les points d'intersection des rayons qui passent par les angles des arêtes de la corniche (points C, I et II) avec le plan de la partie centrale de la façade, on termine la construction de la ligne d'ombre portée de la corniche donnée. Notons que les droites horizontales menées par $1_1'$ et $2_1'$ constituent respectivement les ombres portées des arêtes $I - I$ et $II - II$ sur le plan du mur central.

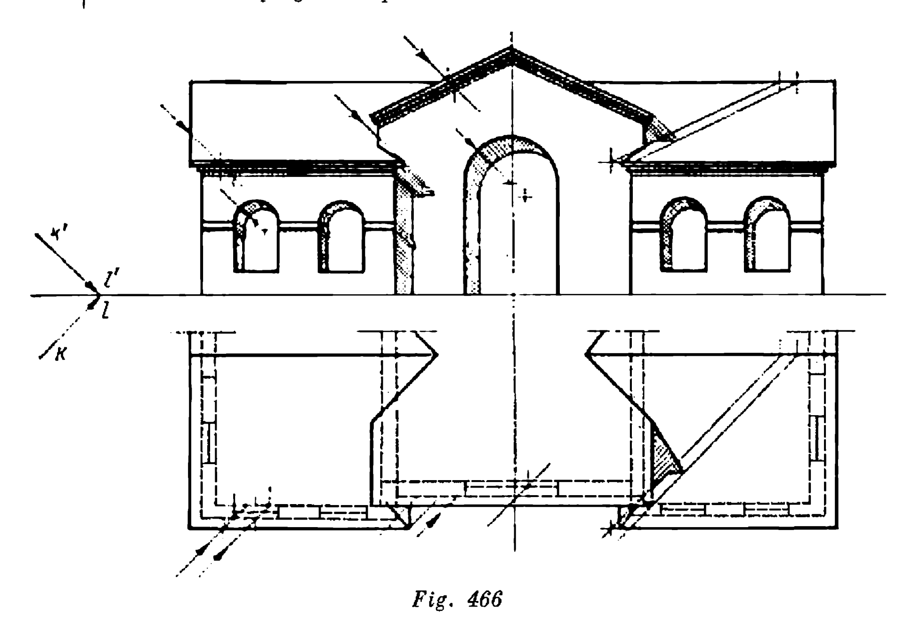


Fig. 466

Passons maintenant à la détermination de l'ombre dans la baie de la fenêtre. La ligne d'ombre portée de la baie est une figure congruente au tracé de la baie mais déplacée dans le sens de la projection verticale du rayon à la distance de ΔS. Ce déplacement est déterminé en définissant l'ombre du centre de l'arc de la circonférence (point Q_1). Il convient d'ajouter à la ligne ainsi établie l'ombre de la saillie de la ceinturette horizontale, ce qui est réalisé à l'aide des rayons passant par les points E et F.

L'ombre de la corniche du fronton est construite sur la figure 468 où la deuxième projection est constituée par l'élévation latérale (projection de profil). Sans reprendre dans le détail la détermination des ombres des arêtes de la corniche sur les plans verticaux des saillies, notons seulement les particularités de la construction de l'ombre portée de l'angle droit de la corniche sur la pente du toit. L'ombre de la droite AB perpendiculaire à V est dirigée suivant le plan oblique parallèlement à la projection verticale du rayon et délimitée par l'ombre du point A. Cette dernière est déterminée comme le point d'intersection du rayon avec le plan projetant parallèle à la ligne de terre de la pente du toit, c'est-à-dire qu'on trouve d'abord sa projection de profil a_1'', et ensuite sa projection frontale a_1'. D'autres points de la ligne recherchée sont obtenus d'une manière analogue.

Pour finir considérons l'exemple de détermination de l'ombre portée par la cheminée sur le plan d'un toit (fig. 469). Sans donner

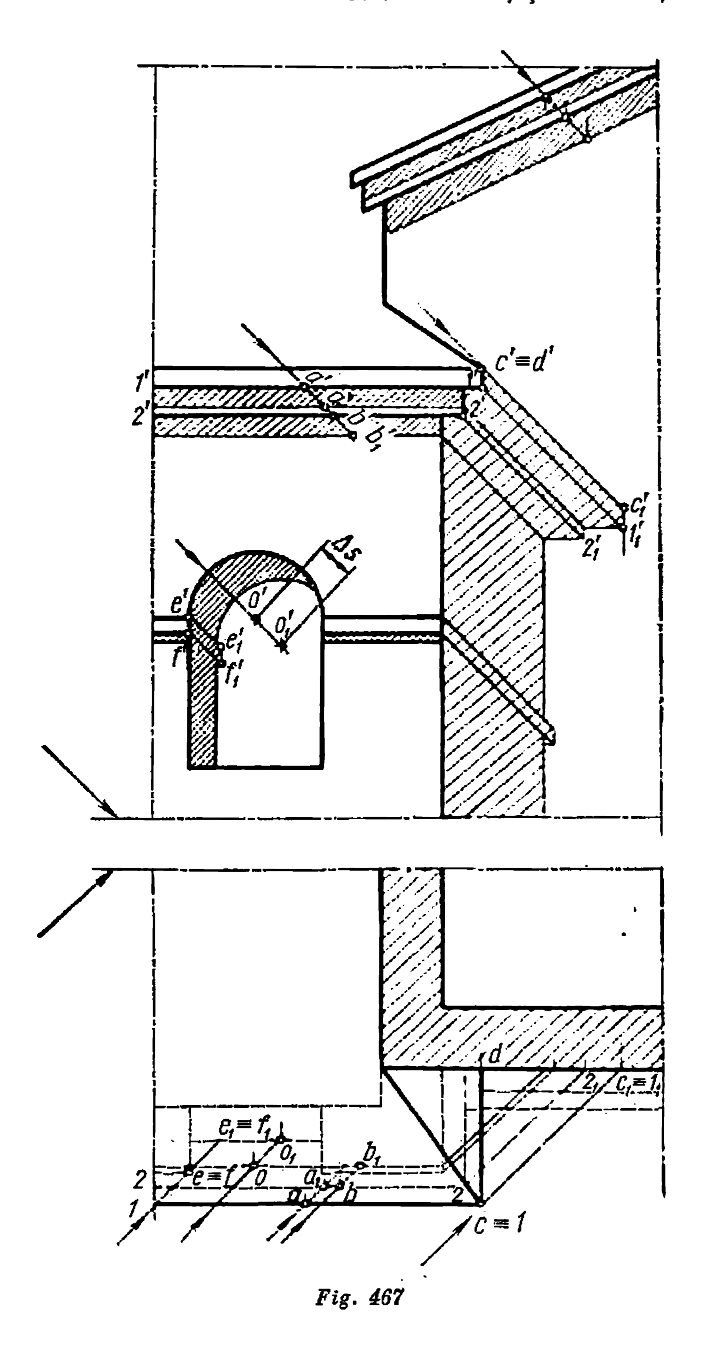

c'≡d'
1'
2'
b
b_1
c_1'
f_1'
$2_1'$
Δs
e'
O'
O_1'
e_1'
f'
f_1'
d'
2_1
$c_1 \equiv 1_1$
$e_1 \equiv f_1$
O_1
b_1
2
e≡f
O
a_1
b
a
1
c≡1
2

Fig. 467

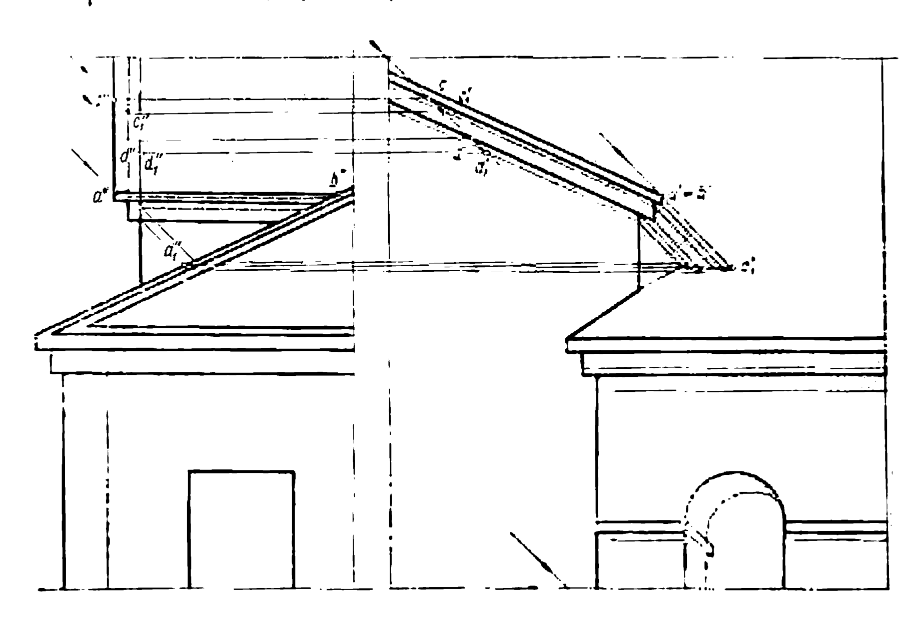


Fig. 468

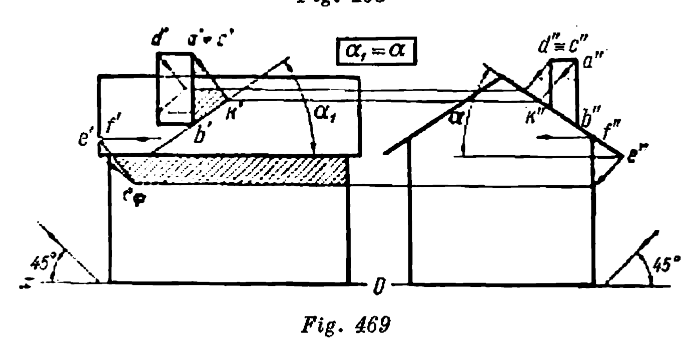


Fig. 469

le détail des constructions liées à l'établissement des points de rencontre des rayons lumineux avec le plan projetant parallèle à la ligne de terre de la pente du toit, démontrons que l'ombre portée des arêtes verticales de la cheminée sur le plan oblique du toit se projette sur V sous forme d'une droite qui compose avec la ligne de terre Ox le même angle α que fait la pente considérée du toit avec le plan H.

En effet, l'égalité des triangles $a'b'k'$ et $a''b''k''$ (deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle égal) conduit à l'égalité des angles au centre $a'b'k' = a''b''k''$, et donc $\alpha_1 = \alpha$ comme angles complémentaires.

CHAPITRE XVIII

OMBRES EN PERSPECTIVE

Pour rendre les dessins perspectifs plus suggestifs, on construit les ombres propres et portées des corps représentés. Ces constructions ont à leur base les principes déjà étudiés aux chapitres XVI et XVII consacrés à la théorie géométrique des ombres et à son application aux projections orthogonales.

Sans les reprendre, passons à des exemples concrets de la construction des ombres en perspective pour mettre en relief certaines particularités propres à ces méthodes.

§ 97. Ombres en perspective linéaire

La source de lumière S étant rejetée à l'infini, sa projection secondaire se trouve sur la ligne d'horison. Quant à l'image perspective

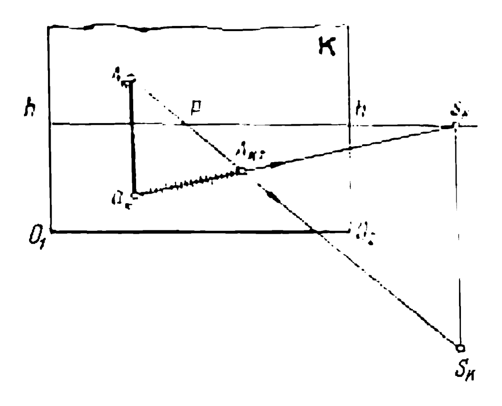


Fig. 470

de la source de lumière (soleil), elle peut se situer au-dessous ou au-dessus de la ligne d'horizon; dans les deux cas le soleil lui-même est placé au-dessus du plan d'horizon *H*.

Dans le premier cas (fig. 470), la source de lumière se trouve dans un espace virtuel (derrière le spectateur), et dans le deuxième (fig. 471), dans un espace réel devant le spectateur, mais derrière le corps représenté.

Sur les dessins considérés on a construit les ombres des points et des segments verticaux. Pour trouver en perspective l'ombre A_{KT}

portée par le point A_K sur le terrain T, il faut mener par le point considéré l'image perspective du rayon (droite $S_K A_K$), et par sa projection secondaire a_K, la projection secondaire du rayon (droite $s_K a_K$). *L'intersection de l'image du rayon avec sa projection secondaire détermine l'ombre A_{KT} du point A_K sur le plan T.* Les ombres des segments verticaux se confondent avec la direction des projections secondaires des rayons lumineux passant par les points a_K.

Le plus souvent on choisit la direction des rayons lumineux *parallèle au tableau* (fig. 472). *Les projections secondaires des rayons sont alors parallèles à la ligne de terre*, c'est-à-dire horizontales.

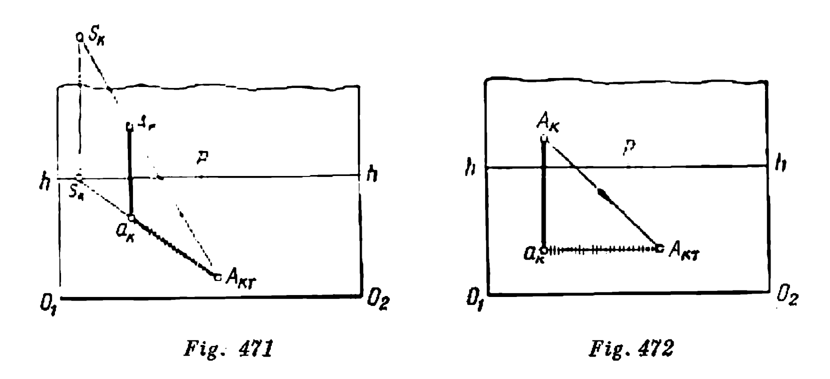


Fig. 471 *Fig. 472*

Les figures 473 à 475 montrent la construction des ombres propres et portées d'un parallélépipède rectangle éclairé par une source lumineuse occupant trois positions différentes.

Une position moins favorable du point S_K est celle où les plans verticaux des faces visibles du parallélépipède se trouvent dans l'ombre propre, alors que l'ombre portée est orientée vers l'observateur (fig. 474). La construction est nettement plus commode lorsque les rayons lumineux sont parallèles au tableau (voir fig. 475). Il faut tenir compte que dans ces conditions non seulement les projections secondaires sont parallèles, mais les rayons lumineux le sont également.

Le premier des trois exemples considérés (voir fig. 473) montre la construction de l'ombre portée par une perche verticale sur les faces verticale et horizontales d'un parallélépipède. Sur la face verticale l'ombre est parallèle au segment lui-même. Sur la face horizontale elle est dirigée vers le point de fuite des projections secondaires des rayons (point s_K qui est en même temps la projection secondaire de la source de lumière S).

Les figures 476 et 477 donnent la construction de l'ombre d'une pyramide et d'un cône. Dans les deux cas on trouve d'abord les ombres des sommets (points L_{KT}), par lesquels on fait passer ensuite

les droites $L_{KT}A_K$ et $L_{KT}D_K$. Sur la figure 476 ce sont les ombres des arêtes et sur la figure 477, celles des génératrices qui déterminent les lignes d'ombre propre des corps géométriques donnés.

La figure 478 donne un exemple de construction des ombres propre et portée d'un cylindre droit dont la base repose sur le plan T.

La partie rectiligne de la ligne d'ombre portée du cylindre est constituée par les traces des plans d'ombre tangents au cylindre.

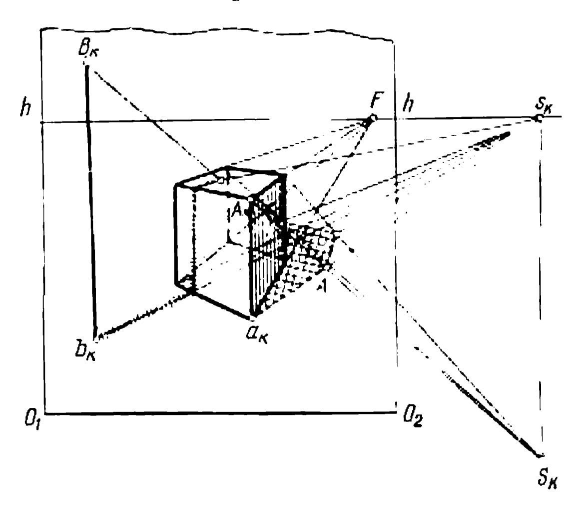


Fig. 473

Sur la figure 478 les traces de ces plans sont les tangentes à la base du cylindre menées du point s_K (projection secondaire de la source de lumière S).

Les points de contact a_K et b_K déterminent celles des génératrices A_Ka_K et B_Kb_K qui appartiennent à la séparatrice. Cette ligne est fermée par l'arc $A_KD_KB_K$ de la base supérieure. Après avoir trouvé les ombres des points de l'arc considéré sur le terrain, on termine la construction de l'ombre portée.

En guise de conclusion examinons deux exemples de construction des ombres portées par un corps sur un autre.

La figure 479 représente la construction de l'ombre portée d'un mur vertical sur un escalier, les rayons lumineux étant parallèles au tableau.

1. L'ombre de l'arête verticale B_Kb_K sur le terrain et le plan horizontal du gradin est parallèle à la projection secondaire du rayon, c'est-à-dire à la ligne de terre.

2. L'ombre de la même arête B_Kb_K sur les plans verticaux des contremarches est parallèle à l'arête elle-même.

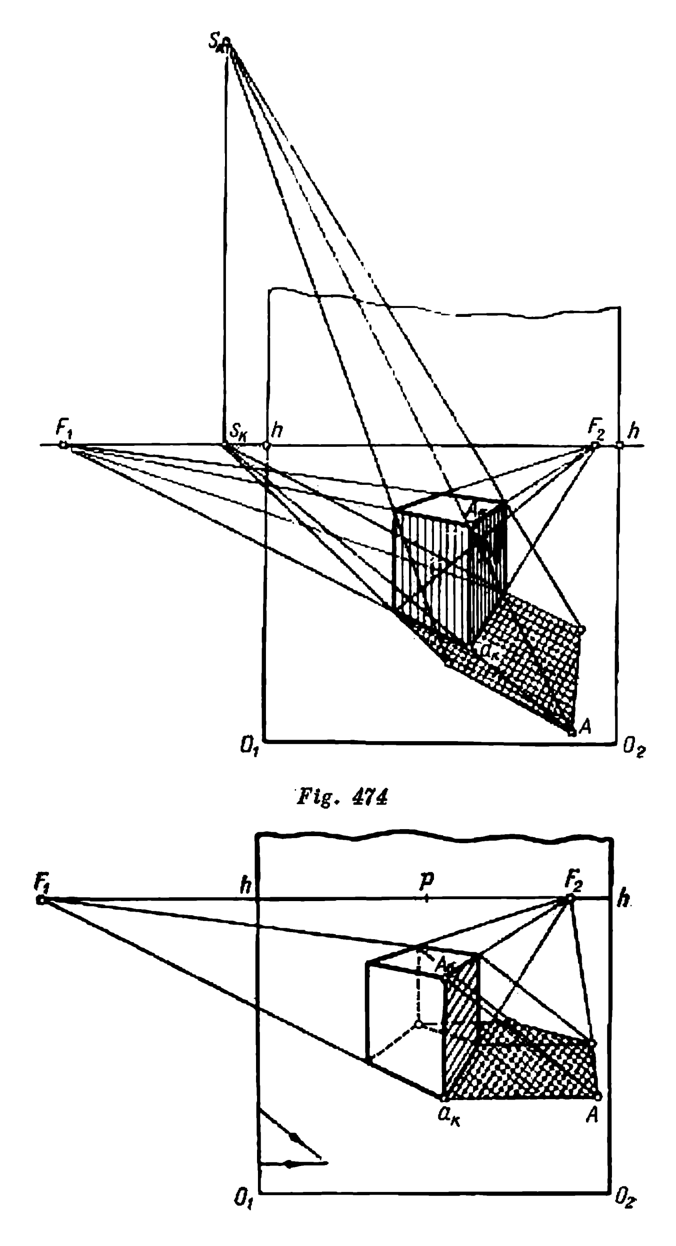


Fig. 474

Fig. 475

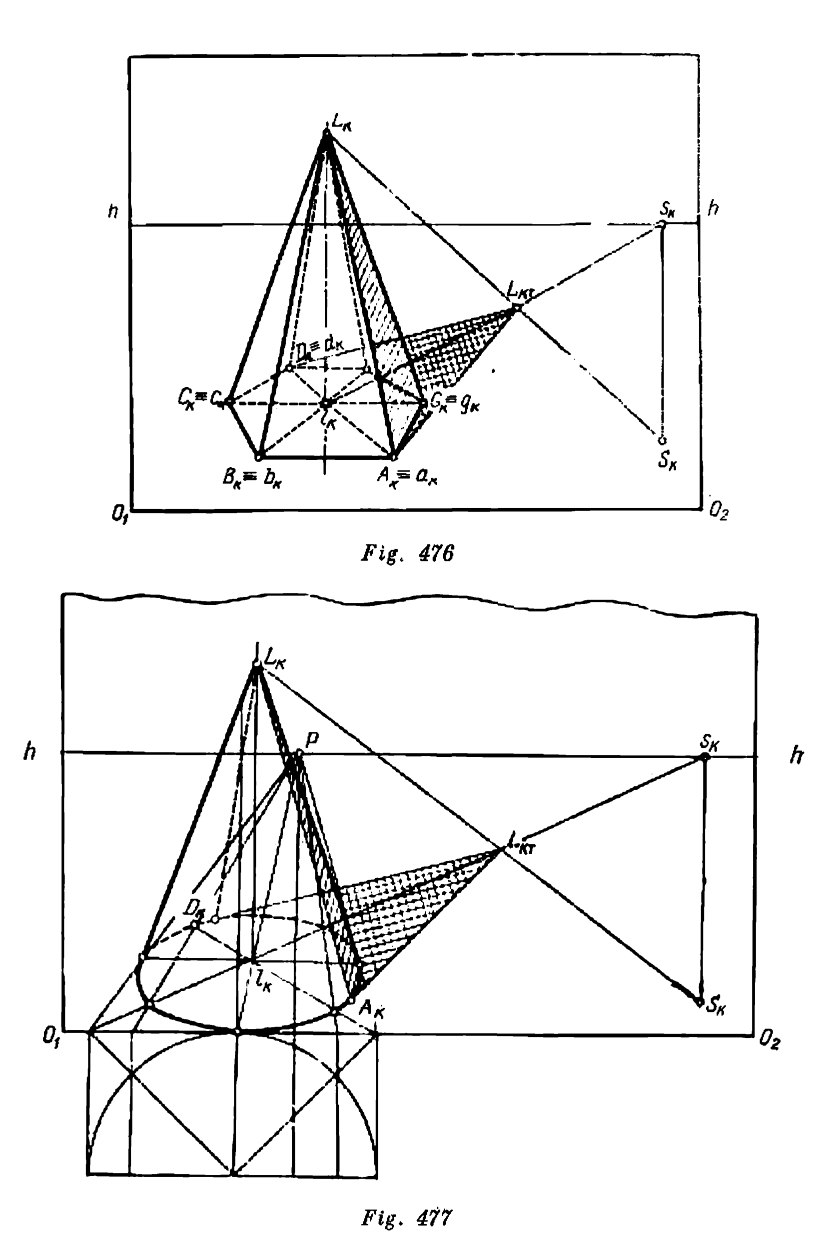


Fig. 476

Fig. 477

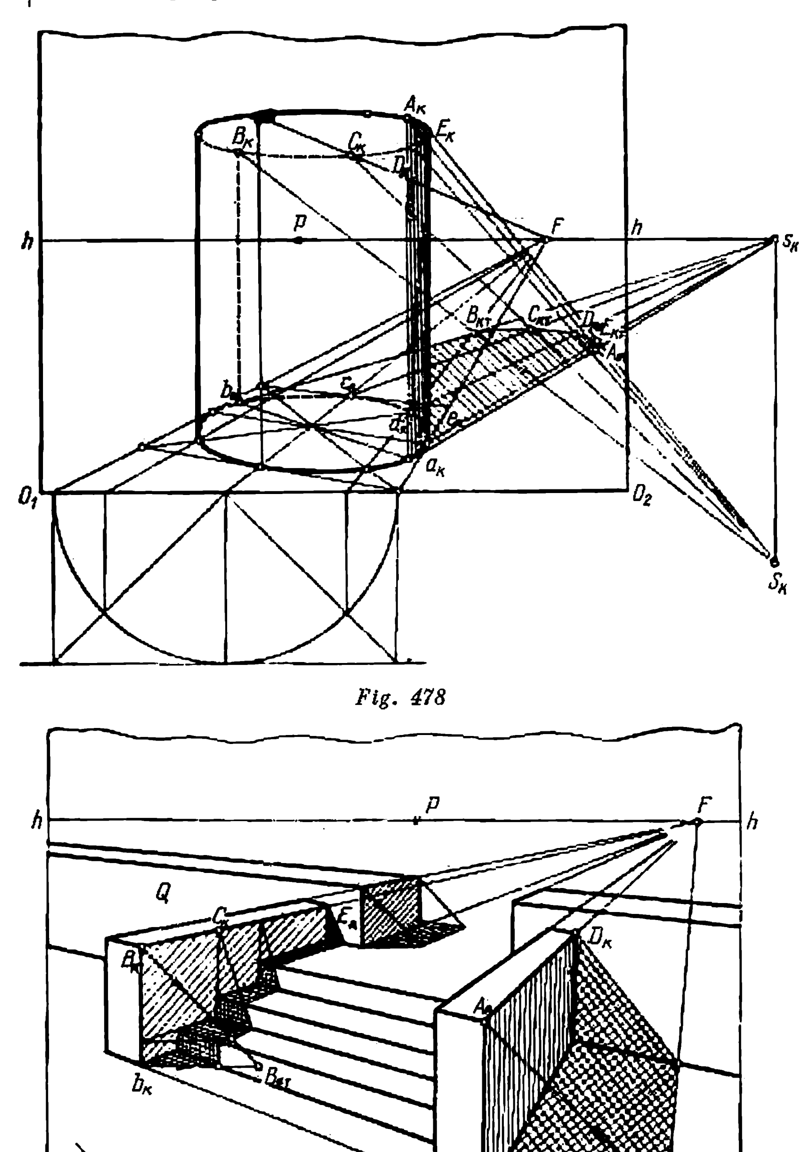


Fig. 478

Fig. 479

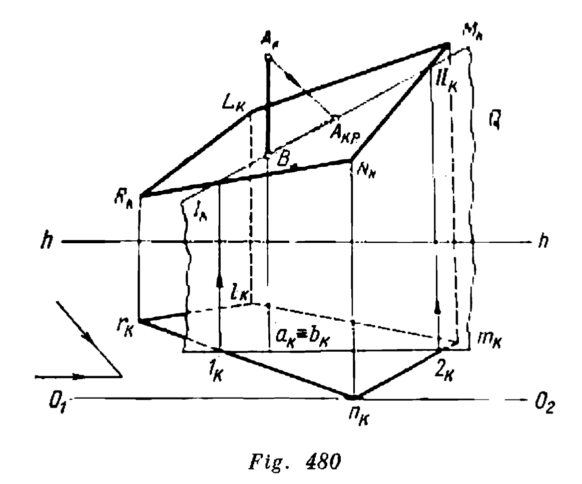


Fig. 480

3. L'ombre de l'arête horizontale B_KE_K sur les plans des gradins parallèles à l'arête a un point de fuite commun avec l'arête elle-même.

4. L'ombre de l'arête B_KE_K portée sur les plans des contremarches est dirigée vers les points où la droite B_KE_K rencontre ces plans prolongés vers le haut. Un de ces points (C_K) est montré sur la figure 479.

De la même façon les ombres des arêtes B_KE_K et A_KD_K sur le plan vertical Q passent par le point d'intersection des arêtes considérées avec le plan Q.

Considérons la figure 480 sur laquelle on a représenté l'image de la pente d'un toit $L_KM_KN_KR_K$ et de l'arête de la cheminée A_KB_K.

Pour construire l'ombre de cette arête sur le plan oblique, on fait passer par le rayon lumineux un plan vertical auxiliaire Q dont la trace sur le terrain se confond avec la projection secondaire du rayon (droite 1_K—2_K). On construit ensuite la ligne d'intersection du plan Q avec la pente donnée. L'image de cette droite est désignée par I_K — II_K, et sa projection secondaire par 1_K — 2_K.

Le point A_{KP} d'intersection du rayon avec la droite I_K — II_K est l'ombre du point A sur le plan oblique de la pente. En joignant A_{KP} au point d'intersection de l'arête et du toit (point B_K), on obtient l'ombre cherchée de l'arête.

La figure 481 illustre le principe de la détermination de l'ombre portée par le faîte du toit sur l'autre pente et la cheminée. Il faut ici effectuer plusieurs fois les constructions représentées sur la figure 480.

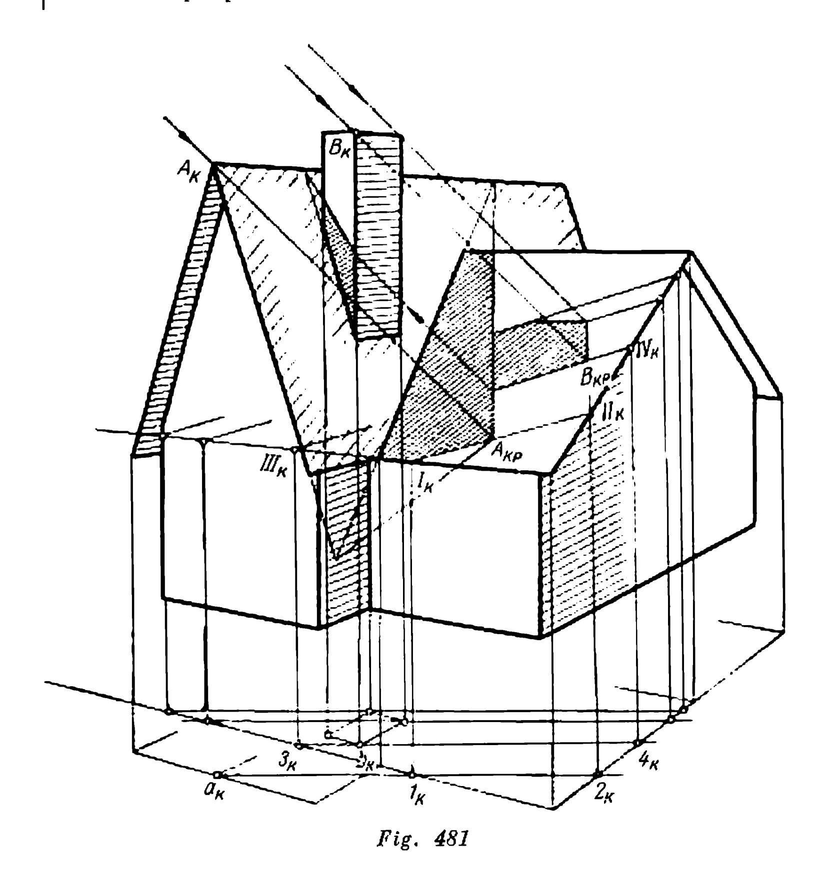


Fig. 481

§ 98. Ombres en perspective axonométrique

En perspective axonométrique la détermination des lignes d'ombre portée ne se distingue en rien de leur détermination en perspective linéaire lorsque les rayons lumineux sont parallèles au tableau.

La seule différence est qu'en perspective axonométrique, l'ombre d'une droite quelconque sur un plan parallèle à cette droite est parallèle à la droite elle-même. En perspective linéaire il en est ainsi seulement dans les cas particuliers où la droite et le plan sont verticaux ou parallèles à la ligne de terre.

Il est recommandé d'orienter le rayon lumineux suivant la diagonale d'un cube dont les faces sont confondues avec les plans de coordonnées, et les arêtes sont construites compte tenu du rapport de réduction (fig. 482).

Les diagonales des faces du cube sont les projections secondaires du rayon sur les plans de coordonnées.

Il en résulte que l'ombre d'une droite perpendiculaire aux plans de coordonnées est parallèle à la projection secondaire du rayon sur le même plan.

Ainsi, l'ombre $a_K A_{KH}$ de l'arête verticale $A_K a_K$ est dirigée suivant la projection secondaire du rayon sur le plan $x_K O_K y_K$ (suivant la diagonale de la face inférieure); l'ombre de la face $A_K C_K (A_K C_K \perp V)$

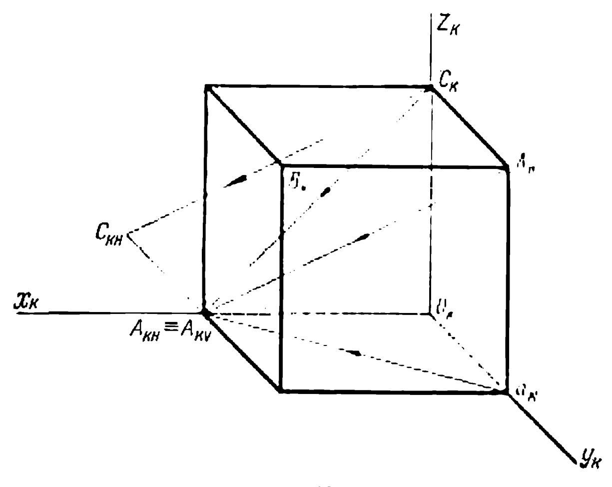


Fig. 482

est déterminée par les points A_{KV} et C_K, c'est-à-dire qu'elle se confond avec la projection secondaire du rayon sur le plan $x_K O_K z_K$.

Sur le même dessin on a construit l'ombre $A_{KH} C_{KH}$ de l'arête $A_K C_K$ sur le plan horizontal.

Soulignons encore une fois que puisque l'arête AC est parallèle au plan xOy, son ombre sur ce même plan est parallèle à l'arête. Les particularités signalées doivent être prises en considération lorsqu'on cherche les solutions de problèmes concrets.

E x e m p l e 1. On donne sur la figure 483 la perspective cavalière d'une surface cylindrique et de ses deux plans tangents verticaux. La surface et les plans sont limités devant et derrière par les lignes I_K et II_K respectivement.

L'établissement de l'ombre portée doit débuter par la construction des ombres des lignes I_K et II_K.

L'ombre de chacune d'elles est constituée par les ombres de deux droites tangentes à l'ombre du demi-cercle. Par exemple, l'ombre de la ligne I_K est composée des ombres $a_K A_{KH}$, $b_K B_{KH}$ de deux droites verticales et de l'ombre $A_{KH} C_{KH} B_{KH}$ du demi-cercle.

La tangente commune $M_{KH}N_{KH}$ aux secteurs courbes des lignes d'ombre I_{KH} et II_{KH} permet de déterminer à l'aide des rayons inverses la limite de l'ombre propre qui est la génératrice $M_K N_K$.

Cette séparatrice peut être construite également sans recourir aux rayons inverses.

En effet, la génératrice cherchée $M_K N_K$ est la droite de contact du plan d'ombre et de la surface cylindrique donnée.

On sait que pour tracer un plan tangent au cylindre et parallèle à la droite donnée (dans notre cas, parallèle au rayon lumineux), il faut commencer par la

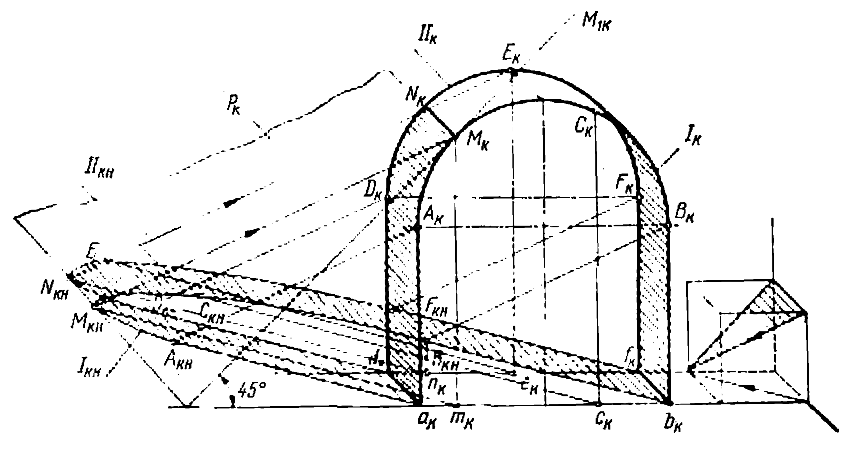


Fig. 483

construction d'un plan directeur. Le plan directeur doit être parallèle aux génératrices du cylindre et à la droite donnée.

Sur la figure 483 ce plan, mis en relief par les hachures, est déterminé par la diagonale du cube (rayon) et une des arêtes horizontales qui est parallèle aux génératrices de la surface cylindrique. Le plan hachuré et le plan frontal se coupent suivant une droite qui forme avec l'horizon un angle de 45° (diagonale de l'arête arrière du cube).

Cet angle détermine la direction des frontales du plan d'ombre tangent P_K.

Sur le même dessin la frontale $M_K M_{1K}$ est menée comme une tangente au demi-cercle avant.

Le point de contact trouvé M_K permet de construire la génératrice cherchée $M_K N_K$.

Le mode décrit de construction de la séparatrice est plus précis que celui qui fait appel aux rayons inverses.

E x e m p l e 2. La figure 484 représente la construction des ombres d'un ensemble des corps géométriques. L'ombre propre couvre les faces visibles qui se trouvent à droite.

L'ombre portée de l'arête verticale $A_K a_K$ sur le plan $x_K O_K y_K$ est parallèle à la projection secondaire du rayon sur ce plan. Cette ombre est ensuite brisée et dirigée en haut suivant le plan U_K jusqu'au point B_K. Lors de la construction des ombres A_{KF}, C_{KF}, D_{KF} et E_{KF} portées par les points sur la surface cylindrique, on utilise les projections secondaires du rayon lumineux sur le plan $y_K O_K z_K$. L'ombre de l'arc elliptique $F_K L_K N_K$ constitue le lieu géométrique des points où

les rayons lumineux qui passent par les points de l'arc coupent le plan de coordonnées $x_K O_K y_K$.

La partie rectiligne de la ligne d'ombre portée du cylindre est l'ombre de la génératrice suivant laquelle le cylindre et le plan lumineux sont tangents.

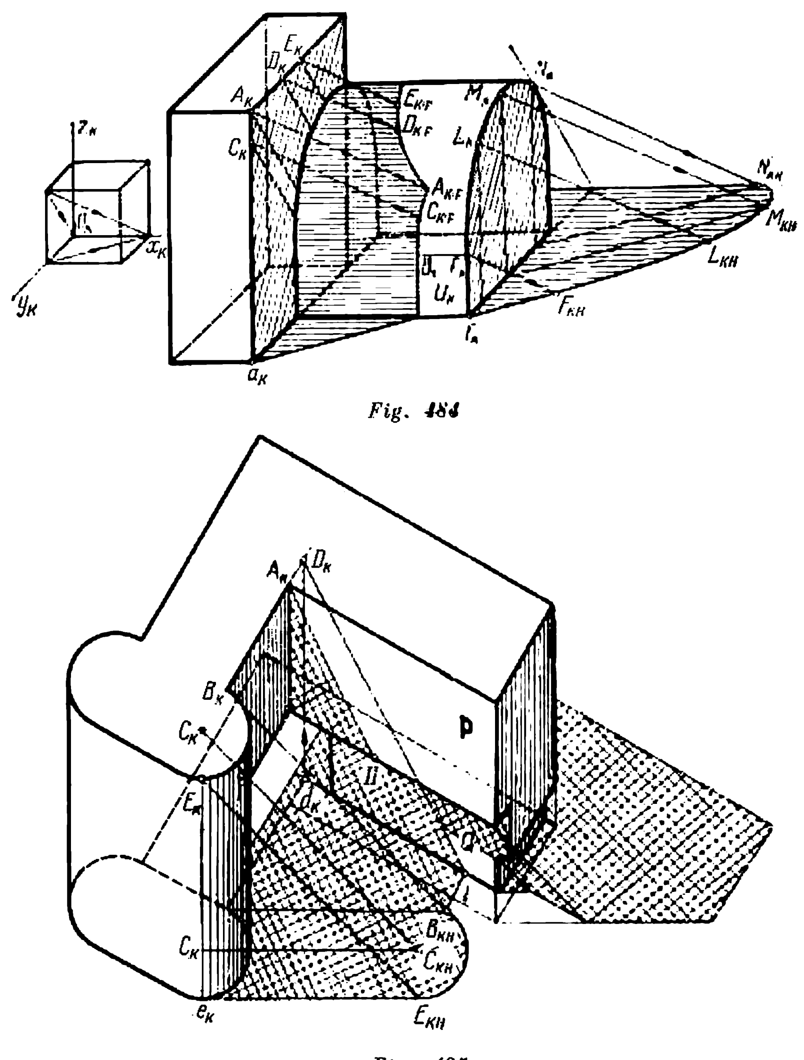


Fig. 484

Fig. 485

Sur la figure 484 la position de cette génératrice est déterminée par le point N_K qui est le point de contact de la base droite du cylindre avec la droite menée parallèlement à la projection secondaire du rayon sur le plan $y_K O_K z$.

E x e m p l e 3. La figure 485 représente le schéma d'un édifice dans une isométrie oblique ($K \parallel H$). La direction du rayon lumineux est déterminée par la droite $C_K C_{KH}$ qui passe par le centre du demi-cercle supérieur droit et en coupant sa projection secondaire donne l'ombre C_{KH} du centre.

Si le plan du toit est parallèle à H, le demi-cercle et son ombre sur H sont congruents.

La génératrice $E_K e_K$, séparatrice du demi-cylindre droit, est la tangente de la surface cylindrique et du plan d'ombre. La position de cette génératrice est déterminée par le point de contact e_K de la base inférieure du cylindre et de la trace horizontale $e_K E_{KH}$ du plan d'ombre tangent.

Dans notre exemple où les génératrices du cylindre sont perpendiculaires au plan H, la trace horizontale du plan d'ombre est parallèle à la projection secondaire du rayon lumineux, c'est-à-dire $e_K E_{KH} \parallel c_K C_{KH}$.

L'ombre de l'arête $A_K B_K$ sur le plan H est tracée parallèlement à l'arête elle-même ($B_{KH} - I \parallel A_K B_K$) jusqu'au mur Q où en I l'ombre est brisée et dirigée vers D_K.

Le point D_K est le point de rencontre de la droite $A_K B_K$ et du mur vertical Q. Sur la figure 485 on détermine d'abord la projection secondaire d_K de ce point (intersection de la projection secondaire de la droite et de la trace du plan Q). L'ombre de la même arête $A_K B_K$ sur le plan P passe par le point A_K parallèlement à la droite $D_K - I$, c'est-à-dire que $A_K - II \parallel D_K - I$.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

PREMIÈRE PARTIE

PROJECTIONS ORTHOGONALES

DEUXIÈME PARTIE

PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE, PERSPECTIVE LINÉAIRE ET PROJECTIONS COTÉES

TROISIÈME PARTIE

OMBRES DANS LES PROJECTIONS ORTHOGONALES ET EN PERSPECTIVE

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir
1er Rijski péréoulok, 2
Moscou
U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique